This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

ANWENDUNG DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG AUF GEOMETRIE

EINE REVISION DER PRINZIPIEN.

VORLESUNG,
GEHALTEN WÄHREND DES SOMMERSEMESTERS 1901

VON

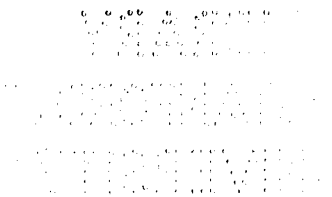
F. KLEIN.

AUSGEARBEITET VON CONRAD MÜLLER.

NEUER ABDRUCK.

LEIPZIG 1907.
IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER.

118825



Vorwort.

Indem ich nachstehend die Vorlesung, welche ich im vergangenen Sommer gehalten habe, in autographischer Ausarbeitung veröffentliche, möchte ich einen neuen Schritt in der Richtung tun, der meine Bemühungen in den letztvergangenen Jahren vorwiegend gegolten haben: die mathematische Wissenschaft als ein zusammengehöriges Ganzes nach allen Seiten wieder so zur Geltung zu bringen, wie es früher, als es noch keinen Spezialismus gab, als selbstverständlich galt, insbesondere aber zu erreichen, daß zwischen den Vertretern der abstrakten und der angewandten Mathematik wieder mehr gegenseitiges Verständnis Platz greife, als augenblicklich besteht. Ich habe schon wiederholt darauf hingewiesen, daß in letzterer Hinsicht eine klare Erfassung des Unterschiedes und der gegenseitigen Beziehungen derjenigen beiden Teile der Mathematik von zentraler Bedeutung sein dürfte, die im Folgenden als Präzisionsmathematik und Approximationsmathematik bezeichnet werden. Ähnliche Gedanken sind in den letzten Jahren von den Herren Burkhardt und Heun geäußert worden; man vergleiche die Antrittsrede des ersteren (Zürich 1897*), die neuerdings durch den Wiederabdruck in dem ersten Heft von Bd. 11 des Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung dem weiteren Kreise der Fachgenossen zugänglich geworden ist, und den Bericht von Herrn Heun über die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik in Bd. 9 daselbst (1900—1901); in diesem Berichte tritt das Wort „Approximationsmathematik", soviel ich weiß, zum ersten Male auf; jedenfalls habe ich es von dort entnommen. Um so mehr darf vielleicht eine ausführliche Auseinanderlegung der in Betracht kommenden Gegensätze, wie sie die folgende Vorlesung für das Gebiet der Geometrie gibt, nunmehr auf Interesse und Verständnis in weiteren Kreisen rechnen.

Zugleich vervollständige ich mit dieser Vorlesung die Auseinandersetzungen, welche ich verschiedentlich über die Methoden des mathematischen Unterrichts, insbesondere des mathematischen Hochschulunter-

*) Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken.

richts gab (siehe z. B. Jahresbericht, Bd. 8, 1898—1899). Meine Ansicht ist nach wie vor, daß der Unterricht der Anfänger, sowie derjenigen Zuhörer, welche die Mathematik nur als ein Hilfsmittel für anderweitige Studien gebrauchen wollen, von den anschauungsmäßigen Momenten einen naiven Gebrauch machen soll; die Überzeugung, daß dies aus pädagogischen Gründen, mit Rücksicht auf die Veranlagung der Mehrzahl der Studierenden, notwendig sei, kommt in den letzten Jahren sichtlich immer mehr; insbesondere auch im Auslande, zur Geltung. Aber nicht minder ist meine Überzeugung (was ich nie unterlassen habe, hinzuzufügen), daß ein solcher Unterricht, entsprechend der heutigen Entwickelung der Wissenschaft, für die Ausbildung der Fachmathematiker auf der Oberstufe nicht genügt, daß hier vielmehr neben den Tatsachen der Anschauung die zentrale Bedeutung des modernen Zahlbegriffs und der weitgehenden mit ihm zusammenhängenden Entwickelungen hervortreten muß. Und nun vermisse ich in den Lehrbüchern und Vorlesungen, welche ich kenne, die Überleitung von der einen Auffassung zur anderen. Hier will sich die folgende Darstellung als eine Ergänzung einschieben; ihr bestes Ziel wird erreicht sein, wenn sie sich eines Tages als überflüssig erweisen sollte, weil die Überlegungen, die sie bringt, zu selbstverständlichen Bestandteilen jedes höheren mathematischen Unterrichts geworden sind.

GÖTTINGEN, den 28. Februar 1902.

F. KLEIN.

Vorbemerkung zum „Neuen Abdruck".

Das Folgende ist im wesentlichen ein unveränderter Abdruck der ersten Ausgabe dieser Vorlesungen vom Jahre 1902. Nur an einzelnen Stellen sind einige Ungenauigkeiten verbessert, sowie in gelegentlichen Zusätzen Hinweise auf neuere Publikationen gegeben, die in engstem Zusammenhange mit den in der Vorlesung gegebenen Entwickelungen stehen. Am Schlusse ist ein Abdruck des „Gutachtens der Göttinger philosophischen Fakultät betreffend die Beneke-Preisaufgabe für 1901", auf das die Ausführungen des Textes verschiedentlich Bezug nehmen, hinzugefügt.

GÖTTINGEN, den 5. Januar 1907.

C. H. MÜLLER.

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Einleitung 1

I. Von den Funktionen reeller Veränderlicher und ihrer Darstellung im rechtwinkeligen Koordinatensystem.

1. Erläuterungen über die einzelne unabhängige Variable x.

Empirische und abstrakte Genauigkeit. Der moderne Zahlbegriff 5
Präzisions- und Approximationsmathematik, auch in der reinen Geometrie 11
Anschauung und Denken, erläutert an verschiedenen Teilen der Geometrie 20
Exemplifikation an zwei einfachsten Sätzen über Punktmengen 25

2. Funktionen von x.

Die abstrakte und die empirische Festlegung einer Funktion (Idee des Funktionsstreifens) 32
Von der Leistungsfähigkeit der räumlichen Anschauung 39
Von der Genauigkeit der Naturgesetze (mit Exkurs über die verschiedenen Ideen betr. die Konstitution der Materie) 41
Attribute der empirischen Kurve: Zusammenhang, Richtung, Krümmung . . 50
Cauchys Definition der stetigen Funktion. Wie weit reicht die Analogie mit der empirischen Kurve? 59
Die Integrierbarkeit der stetigen Funktion 65
Der Satz von der Existenz des Maximums, bezw. Minimums 72
Die 4 Grenzwerte des Differenzenquotienten 76
Weierstraß' nicht differentierbare Funktion; ihr Allgemeinverlauf 83
Ihre Nichtdifferentierbarkeit 93
Die „vernünftigen" Funktionen 101

3. Von der angenäherten Darstellung der Funktionen.

Seite

Approximation empirischer Daten durch vernünftige Funktionen 103
Annäherung vernünftiger Funktionen durch einfache analytische Ausdrücke 109
Lagranges Interpolationsformel 110
Der Taylorsche Satz und die Taylorsche Reihe 117
Annäherung des Integrals und des Differentialquotienten durch die Taylorsche Reihe 121
Von den analytischen Funktionen und ihrer Verwendung für die Naturerklärung 126
Interpolation durch eine endliche trigonometrische Reihe 139

4. Nähere Ausführungen zur trigonometrischen Darstellung der Funktionen.

Fehlerabschätzung bei der Darstellung empirischer Funktionen 144
Trigonometrische Interpolation gemäß der Methode der kleinsten Quadrate 150
Der harmonische Analysator, nebst Beispielen trigonometrischer Reihen . . 152
Art der Annäherung durch endliche trigonometrische Reihen 158
Tschebycheffs Arbeiten über Interpolation 166

5. Funktionen zweier Veränderlicher.

Grundbegriffe der Stetigkeit usw., der Entwickelbarkeit 172
Praktische Beispiele von Funktionen, für welche $\frac{d^2f}{dxdy} \gtrless \frac{d^2f}{dydx}$ 179
Approximative Darstellung von Funktionen der Kugelfläche durch Reihen nach Kugelfunktionen 190
Die Werteverteilung der Kugelfunktionen über die Kugel hin 202
Fehlerschätzung bei der abbrechenden Kugelfunktionenreihe 205

II. Freie Geometrie.

1. Präzisionstheoretische Betrachtungen zur ebenen Geometrie.

Sätze über Punktmengen 209
Punktmengen, die durch Inversion an 2 oder mehr sich nicht schneidenden Kreisen hervorkommen 213
Eigenschaften dieser Mengen. Allgemeine Wichtigkeit der Punktmengen in der Geometrie 228
Begriff des 2-dimensionalen Kontinuums. Allgemeiner Kurvenbegriff . . . 233
Von der Peano-Kurve, die ein ganzes Quadrat überdeckt 238
Engerer Kurvenbegriff: die Jordan-Kurve 247
Weitere Einengung des Kurvenbegriffs: die reguläre Kurve 251
Approximation anschaulicher Kurven durch reguläre Idealkurven 257

Seite
Vorstellbarkeit der Idealkurven 260
Spezialisierung der Idealkurven: Analytische, algebraische Kurven. Geometrische Erzeugung der letzteren nach Graßmann. 262
Beherrschung des Empirischen durch Idealgebilde; Perrys Standpunkt . . 272

2. Fortsetzung der präzisionstheoretischen Betrachtungen zur ebenen Geometrie.

Iterierte Inversion an 2 sich berührenden Kreisen 275
Dasselbe an 3 sich berührenden Kreisen („Modulfigur") 284
Der Normalfall von 4 sich in zyklischer Reihenfolge berührenden Kreisen (große Figur auf pg. 296) 295
Der allgemeine Fall von 4 sich in zyklischer Reihenfolge berührenden Kreisen (große Figuren auf pg. 304, 307) 298
Eigenschaften der hierbei entstehenden nicht-analytischen Kurven 309
Voraussetzung dieser ganzen Entwickelungen. Weitere Idealisierung bei Veronese 317

3. Übergang zur praktischen Geometrie: A) Geodäsie.

Ungenauigkeit aller praktischen Messungen. Ausführungen beim Pothenotschen Problem 328
Festlegung des Genauigkeitsmaßes durch iterierte Messungen. Prinzipielle Auffassung der Methode der kleinsten Quadrate 333
Approximatives Rechnen, erläutert am Legendreschen Satze für kleine sphärische Dreiecke 336
Die geodätische Bedeutung der kürzesten Linie auf dem Erdsphäroid (nebst Postulaten betr. die Theorie der Differentialgleichungen) 339
Von dem Geoid und seiner praktischen Festlegung 349

4. Fortsetzung der praktischen Geometrie: B) zeichnende Geometrie.

Postulierung einer Fehlertheorie auch für die zeichnende Geometrie, erläutert an der zeichnerischen Wiedergabe des Pascalschen Satzes 358
Von der Möglichkeit, aus der empirischen Gestalt auf Eigenschaften der Idealkurve zu schließen 366
Anwendung des Verfahrens speziell auf algebraische Kurven. Algebraische Vorkenntnisse, die wir voraussetzen 371
Aufstellung des zu beweisenden Theorems: $w'+2t''=n(n-2)$ 381
Prinzipien des zu führenden Kontinuitätsbeweises 386
Übergang der C_n durch eine Form mit Doppelpunkt 392
Beispiele von Kurven, bei denen das Theorem stimmt, für gerades n . . . 398
Desgleichen für ungerades n 407
Erläuterung des Kontinuitätsbeweises an Beispielen 413
Durchführung des Kontinuitätsbeweises 421

III. Anhang: Von der Versinnlichung idealer Gebilde durch Zeichnungen und Modelle.

Seite

Gestaltliche Verhältnisse bei singularitätenfreien Raumkurven, insbes. C_3 (Projektionen der Kurven und ebene Schnitte der Developpablen) . . . 424

Die 7 Arten singulärer Punkte von Raumkurven 447

Allgemeines über die Gestalt singularitätenfreier Flächen 441

Von den Doppelpunkten der F_3, insbesondere ihren biplanaren und uniplanaren Punkten 447

Von dem gestaltlichen Verlauf der F_3 überhaupt 457

Appell zu immer erneuter Korrektur des traditionellen Wissenschaftsbetriebes durch Naturbeobachtung 467

Abdruck des Gutachtens betr. die Beneke-Preisaufgabe für 1901 469

Einleitung.

Durch die neuzeitliche mathematische Litteratur geht ein tiefgreifender Zwiespalt, der Ihnen allen entgegengetreten sein muß: die Interessen und Gedankengänge der Zweveliker sind von denjenigen Methoden, deren man sich bei den Anwendungen tatsächlich bedient, ausserordentlich verschieden. Hierunter leidet nicht nur die wissenschaftliche Ausbildung der Einzelnen, sondern die Geltung der Wissenschaft selbst. Es scheint ausserordentlich wichtig, den hieraus entstehenden Mißständen entgegenzuarbeiten. Die Vorlesung, die ich hier beginne, will einen Beitrag liefern, indem sie darauf ausgeht, die verschiedenen Arten mathematischer Fragestellung, wie sie hier und dort naturgemäß sind, sorgfältig vom erkenntnistheoretischen Standpunkt aus, gegeneinander in klare Beziehung zu setzen. Sie wollen nach der einen

Seite die Interessen der modernen Tierrechter verste-
hen lernen, nach der anderen Seite aber ein Urteil darü-
ber gewinnen, welche Teile der mathematischen Spe-
kulation für die Anwendungen unmittelbare Bedeu-
tung haben. Ich zweifle nicht, daß Ihnen die Entge-
gensetzung verschiedener Gesichtspunkte, die solcher
weise resultieren wird, interessant und förderlich sein wird,
möchte die Vorlesung erreichen, daß die bei Ihnen resul-
tierende Überzeugung sich in die Tat umsetzt, und Sie
später an Ihrem Teile beitragen, die arg vereinseitig-
te Entwicklung unserer Wissenschaft wieder zu einer
allseitigen, harmonischen zu machen!

Das Programm, das ich hiermit aufstelle, ist aller-
dings viel zu umfassend, als daß es sich in einem Se-
mester nach allen Seiten hin entwickeln ließe. Ich
werde daher wesentlich nur ein Gebiet der Mathe-
matik in den Vordergrund rücken, nämlich die Geo-
metrie. Die Praxis der Geometrie umfaßt das geometrische
Zeichnen und das Vermessungswesen, denen nach ande-
rer Seite die von den Griechen begonnene abstrakte Be-
handlung geometrischer Probleme entgegentritt. Ich
werde die auf beiden Seiten in Betracht kommenden
Fragen analytisch behandeln. Dies wäre an sich keine
Notwendigkeit, man kann auch so vorgehen, daß man

nirgends aus dem geometrischen Gebiete als solchem heraustritt. Inzwischen hat sich die Ausbildung der von mir zu besprechenden Fragestellungen wesentlich im Anschluß an die Analysis vollzogen: insbesondere kommt für uns die Entwicklung und Bedeutung der Differential und Integralrechnung in Betracht. Von hier aus habe ich den Titel der gegenwärtigen Vorlesung gewählt. — In den parallellaufenden Seminarübungen werde ich ausgewählte Kapitel der Geodäsie traktieren, die geeignet scheinen, den mehr allgemein gehaltenen Entwicklungen der Vorlesung als Beispiele rationeller Anwendung an die Seite zu treten.

Als Litteratur kann ich kein Lehrbuch nennen. Ich werde von Fall zu Fall die Einzellitteratur zitieren und im übrigen mit Vorliebe auf die im Erscheinen begriffene

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 7 Bde.

hinweisen, deren Programm es ist, die ganze Mathematik des 19ten Jahrhunderts zur Darstellung zu bringen und deren gesamte Litteratur zu gruppieren.

Vielleicht komme ich in den folgenden Semestern dazu, das gleiche Programm auch noch auf andere Gebiete der Mathematik auszudehnen. Es wird sich uns,

besondere um die Fragestellungen der mathematischen Naturerklärung (Mechanik u.s.w.) handeln. Eine Reihe hierher gehöriger Ideen ist in den Gutachten enthalten, welches unsere Göttinger philosophische Fakultät kürzlich bei der Feier der Beneke-Stiftung erstattet hat"[1].

Im Übrigen knüpfe ich wesentlich an eine eigene Arbeit an, die ich im Jahre 1893 unter demTitel:

F. Klein: Über den Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve

in den Erlanger Berichten publizierte (abgedruckt in Bd. 23 der Mathematischen Annalen). Ich kannauch auf den Vortrag VI meines Evanston Colloquiums:

F. Klein: Lectures on Mathematics, New-York 1894, französisch von L. Laugel, Paris 1898

verweisen. Der Titel des Vortrags lautet:

on the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences.

---

1) Göttinger Nachrichten 1901, Geschäftliche Mitteilungen Heft 1, auch Mathematische Annalen 55 (1901). Vgl. den Wiederabdruck vorliegender Vorlesungen.

Ich wende mich nun gleich dem ersten Teile meiner Vorlesung zu, den ich überschreibe:

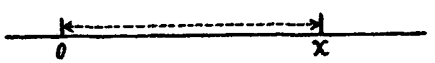
I. Von den Funktionen reeller Veränderlicher und ihrer Darstellung im rechtwinkeligen Koordinatensystem.

I, 1 Erläuterungen über die einzelne Variable x

Ich beginne systematisch in der Weise, daß ich zunächst garnicht von Funktionen spreche, sondern vorab

die unabhängige Veränderliche x

selbst ins Auge fasse, die ich mir geometrisch auf einer Abszissenachse mit fest gewähltem Anfangspunkt 0 als Punkt dadurch deute, daß ich demselben den Betrag der Abszisse als Zahlenwert x beilege.



Ich wünsche hier nun das Interesse auf die Genauigkeit einer solchen Operation zu richten. In dieser Beziehung ist zu bemerken:

Wenn ich irgend ein empirischer Verfahren anwen-

de, zu denen ich das Zeichnen, Messen, das visuelle Auffassen durch das Augenmaass oder auch das geistige Reproduzieren durch räumliches Vorstellen rechne, so kommt der obigen Festlegung nur beschränkte Gültigkeit zu, wie ich dies beim Messen mit einigen Zahlenwerten belegen werde.

Bedient man sich beim Messen der heutzutage erreichbaren äussersten Präzision, so kann man beim Messen von 1 m die Genauigkeit bis auf 1/10 μ (μ = 1/1000 m/m) steigern. Wollte man noch weiter gehen, so droht die Lichtwirkung in den verschärften Mikroskopen (wegen Auftretens der Beugung) zu versagen, sowie auch die Molekularstruktur der Materie in ihre Rechte einzutreten (da die Molekulardistanzen 1/50 μ sind), so dass also die physikalischen Gesetze, denen Licht und Materie unterworfen sind, eine grössere Genauigkeit beim Messen zu verbieten scheinen. In Metern ausgedrückt ist 1/10 μ = 0,000 000 1, sodass also die Längenangaben in Metern im günstigsten Falle bis zur 7ten Dezimalen zuverlässig sind.

Ähnlich liegen die Verhältnisse beim Zeichnen und Messen durch Augenmaass; nur dass hier der Schwellenwert d. h. der Wert, jenseits dessen sich die Beobachtung nicht mehr ausdehnen lässt, natürlich viel höher liegt.

Immerhin läßt sich aber als oberster Satz, der kein eigentlich mathematischer Satz ist, aber für die Anwendungen der Mathematik fundamental ist, folgender aufstellen:

In allen diesen praktischen Gebieten gibt es einen Schwellenwert der Genauigkeit.

Wie steht es aber mit dem räumlichen Vorstellen?

Wir kommen mit dieser Frage in ein controverses Gebiet, da hier die Philosophen zu den verschiedensten Zeiten die verschiedensten Ansichten aufgestellt haben.

Insbesondere erscheint bei einem großen Teile derselben die räumliche Vorstellung als etwas absolut Exaktes (nichts Verschwommenes). Demgegenüber ist hervorzuheben, daß der moderne Mathematiker zahlreiche Beispiele von Raumgebilden anzugeben vermag, deren räumliche Vorstellung wegen der Feinheit der in Betracht kommenden Struktur schlechterdings unmöglich erscheint. Ich glaube also auch beim räumlichen Vorstellen an einen Schwellenwert, will Ihnen aber garnicht diese Ansicht aufoktroyieren, sondern an den verschiedenen Stellen auf die erwähnten Beispiele hinweisen und diese Ihrer eigenen Prüfung auf ihre räumliche Vorstellbarkeit hin überlassen. Ich formuliere da-

her hinsichtlich des räumlichen Vorstellens nur folgenden Satz:

Ob auch beim Vorstellen räumlicher Gebilde ein derartiger Schwellenwert existiert, ist controvers und mag der wiederholten Prüfung an später mitzuteilenden Beispielen überlassen bleiben.

Der hier mit Anschluß an die unabhängige Veränderliche x entwickelte Begriff der Schwellenwerte existiert übrigens auch in anderen Fällen z. B. beim praktischen Zahlenrechnen, worauf wir bald zurückkommen.

Vergleichen Sie nun mit diesen empirischen Erfahrungsweisen zur Festlegung der Zahl x ihre arithmetische Definition, wie dieselbe z. B. in den Lehrbüchern gegeben wird, so bemerken Sie, daß bei letzterer die Genauigkeit unbegrenzt ist.

Wir verständigen uns zunächst über diese arithmetische Definition einer Zahl x, kurz gesagt, über den modernen Zahlbegriff.

Um nicht zu weit ausholen zu müssen, werden wir sagen, daß wir eine Zahl als durch einen Dezimalbruch definiert ansehen, dabei aber auch noch einen unendlichen Dezimalbruch als Definition einer bestimmten Zahl gelten lassen. Wird nun auch umgekehrt jede Zahl durch einen bestimmten Dezimalbruch vorgestellt?

Hier ist zunächst eine allgemeine Verabredung zu tref-
fen, die man hinsichtlich der beiden Dezimalbrüche:

$1,000000\ldots$

$0,999999\ldots$

trifft. Man setzt nämlich fest, daß beide dieselbe Zahl
vorstellen sollen. Dies ist an sich eine willkürliche Festsetzung,
bei der daher nichts zu beweisen ist; wohl aber kann
man nach dem Prinzip dieser Festsetzung fragen. Sub-
trahiert man die beiden Dezimalbrüche, so ergiebt sich

$0,000000\ldots$

mit einer 1, die stets weiter nach rechts rückt, je mehr
Stellen man bei der Rechnung nimmt; diese Differenz
wird also im Limes kleiner als jede noch so kleine vor-
gegebene Zahl. Man mache nun ausdrücklich folgende
Verabredung, die K. Weierstraß in seinen Vorlesungen
stets als solche hervorhob:

Zwei Zahlen sollen gleich heissen, wenn sie sich von
einander um weniger als eine noch so kleine vorgege-
bene Grösse unterscheiden.

Dann folgt in der Tat $1,000000\ldots = 0,999999\ldots$
und überhaupt werden wir für einen endlichen De-
zimalbruch sagen dürfen: Jeder endliche Dezimal-
bruch kann so abgeändert werden, daß man die letzte Ziffer
um eine Einheit vermindert und dann lauter Neunen set-

gen läßt. Hier ist aber die einzige Unbestimmtheit, auf die wir stoßen. Also:

Jeder endliche oder unendliche Dezimalbruch liefert eine Zahl und jede Zahl, von dem gerade erwähnten Ausnahmefall abgesehen, nur einen Dezimalbruch.

Wie unterscheiden sich bei dieser Darstellung die rationalen und irrationalen Zahlen?

Als Antwort ist aus den Elementen bekannt: als Dezimalbruch geschrieben ist eine rationale Zahl ($= \frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen) dadurch kenntlich, daß der Dezimalbruch entweder abbricht oder periodisch ausläuft. Auch das Umgekehrte ist richtig. Hier nur beiläufig.

Es ist natürlich erforderlich, die normalen Rechnungsgesetze, welche zunächst nur für die rationalen Zahlen aufgestellt werden, auch auf die Irrationalzahlen auszudehnen, und als Buch, in dem diese Einordnung der Irrationalzahlen in leichtfaßlicher und doch sehr eingehender Weise vollzogen ist, möchte ich Ihnen insbesondere empfehlen:

J. Tannery: Introduction à la theorie des fonctions d'une variable, Paris 1886.

Im übrigen wolle man in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften das Referat von

A. Pringsheim: Irrationalzahlen und Konvergenz un-

endlicher Prozesse, Bd. I, pg. 49 ff.
vergleichen (p. 49-58 kommt zunächst in Betracht
und sollte von jedem Mathematiker gelesen werden).

Und nun der Punkt, auf den es mir besonders hier
ankommt: Ein solcher Dezimalbruch hat eine unbe-
grenzte Genauigkeit d.h. der Schwellenwert, von dem wir
oben sprachen, sinkt hier in der abstrakten Arithme-
tik unter jede Grenze. Damit haben wir den fundamen-
talen Gegensatz zwischen Empirie und Idealisierung,
den ich in diesem besonderen Falle so formuliere:

Im ideellen Gebiet der Arithmetik gibt es keinen
endlichen Schwellenwert, wie im empirischen Gebiet,
sondern die Genauigkeit, mit der die Zahlen definiert
werden oder durch als definiert angesehen werden
ist unbegrenzt.

Der hier im speziellen Falle zwischen der empirischen
Festlegung einer Grösse in der praktischen Geometrie
und der genauen Definition in der abstrakten Arith-
metik konstatierte Unterschied von begrenzter und un-
begrenzter Genauigkeit findet sich nun immer wieder,
wenn man irgend ein Gebiet der äusseren Wahrneh-
mung oder der praktischen Betätigung mit der abstrak-
ten Mathematik vergleicht. Er gilt für die Zeit, für alle
mechanischen und physikalischen Grössen und na-

nentlich auch für das numerische Rechnen. Denn was ist das Rechnen mit 4- stelligen Logarithmen etwa anderes, als ein Rechnen mit Zahlen, deren Genauigkeit nur bis zur 4ten Stelle reicht? Andrerseits kann man in jedem Gebiet an der Hand geeigneter Axiome (wie wir noch sehen werden) zur absoluten Genauigkeit fortschreiten; wir setzen dann eben an die Stelle der praktischen Wissenschaft ein idealisierter Gedankending.

Diese Unterscheidung zwischen absoluter und beschränkter Genauigkeit, die sich als roter Faden durch die ganze Vorlesung ziehen wird, bedingt nun eine grosse Zweiteilung der gesamten Mathematik. Wir unterscheiden:

1) Präzisionsmathematik (Rechnen mit absolut genauen Zahlen)

2) Approximationsmathematik (Rechnen mit Zahlen von begrenzter Genauigkeit).

In dem Worte Approximationsmathematik soll keine Herabsetzung dieses Zweiges der Mathematik liegen, wie sie denn auch nicht eine approximative Mathematik, sondern die Mathematik der approximativen Beziehungen ist. Wir haben erst die ganze Wissenschaft, wenn wir die beiden Teile umfassen:

Die Approximationsmathematik ist derjenige Teil unserer Wissenschaft, den man in den Anwendungen hat

räthlich gebraucht; die Präzisionsmathematik ist sozusagen das feste Gerüst, an dem sich die Approximationsmathematik emporrankt.

Ich illustriere zunächst diese Zweiteilung der Mathematik an dem Zahlenrechnen, bei dem der genannte Gegensatz nicht durch verwickelte psychologische Verhältnisse verdunkelt wird, sondern unmittelbar hervortritt.

In der Präzisionsmathematik operieren wir mit genauen Zahlen, wie sie eben durch endliche oder unendliche Dezimalbrüche definiert wurden. Hier liegt sich nun in der Sprache der Präzisionsmathematik eine ungenaue Zahl $\bar{x}$, sagen wir $x = 6,437528\,4\ldots$ bis auf 7 Dezimalen berechnen.[1] Die Mathematik hat bereits aus dem 18ten Jahrhundert das Funktionszeichen E als Abkürzung des französischen Wortes „entier". $E(x)$ ist die größte ganze Zahl, die in x enthalten ist. Mit Hülfe dieses Zeichens drückt sich obige Zahl offenbar als $\frac{E(10000000\,x)}{10000000}$ aus, so daß wir also beim Rechnen mit siebenstelligen Dezimalen statt mit der genauen Zahl x mit der Zahl $\frac{E(10000000\,x)}{10000000}$ operieren. Nehmen wir die Ideenbil-

1) Bricht man den Dezimalbruch nicht einfach ab, sondern rundet ihn auf, so behält aller reine Gültigkeit, wenn man $E(x)$ als die im Intervalle $\frac{1}{2}+x$ bis $\frac{1}{2}+z$ enthaltene größte ganze Zahl definiert.

dungen der Präzisionsmathematik als Maaßstab, so können wir hiernach sagen:

Wir arbeiten bei dem approximativen d. h. dem wirklichen Zahlenrechnen garnicht mit den abstrakten Zahlen x, sondern mit den den abstrakten Zahlen x zugehörigen ε-funktionen.

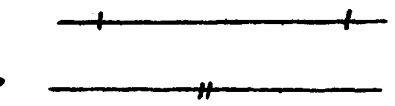
Ganz ähnlich liesse sich der Unterschied zwischen empirischer und abstrakter Geometrie, oder vielmehr die Beziehung der empirischen Geometrie zur abstrakten bezeichnen.

Zunächst von dem Charakter der praktischen Geometrie. Es ist dies diejenige Geometrie, mit der wir es zu thun haben, wenn wir konkrete räumliche Verhältnisse beherrschen wollen, also beim Zeichnen und Modellieren, sowie beim Vermessungswesen. Hierbei sind alle Operationen nur bis zu einer gewissen Schwelle genau. Daher wird man Grundsätze folgender Art aufstellen:

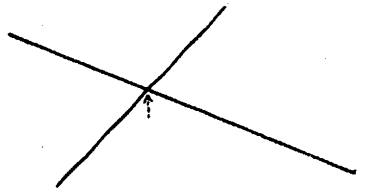
Ein Punkt in diesen Disziplinen ist ein Körper, der so kleine Ausdehnungen hat, daß wir von ihnen absehen.

Eine Kurve, insbesondere eine gerade Linie, ist eine Art Streifen, bei dem die Breite hinter der Länge zurücktritt.

Zwei Punkte bestimmen eine Verbindungsgerade um so genauer



je weiter sie auseinanderliegen. Lie-
gen sie dicht beieinander, so sind sie
zur Festlegung der geraden Linie
sehr ungeeignet.



Zwei gerade Linien bestimmen ei-
nen Schnittpunkt um so genauer, je
grösser der Winkel ist, den sie mitein-
ander einschliessen. Wenn der Winkel kleiner und kleiner
wird, wird der Schnittpunkt immer mehr ungenau.

Nun aber die <u>abstrakte Geometrie</u>: Hier kennen
wir solche unbestimmte Aussagen nicht. Das liegt daran,
dass die abstrakte Geometrie damit beginnt, diejenigen
Dinge, die in der praktischen Geometrie annähernd wahr
sind, in absoluter Form als Axiome an die Spitze zu stel-
len. Hier liegt also eine ganz entscheidende Gedankenwen-
dung vor. Es werden Beziehungen, die in praxi nur ap-
proximativ richtig sind, als streng richtig postuliert
und auf Grund der so verabredeten „Axiome" in der
abstrakten Geometrie Folgerungen durch rein logisches
Raisonnement gezogen. Hier lauten dann die <u>Grund-
sätze</u>:

Ein Punkt hat keine räumliche Ausdehnung.
Eine Linie hat nur Länge.
Zwei Punkte haben eine völlig bestimmte Verbindungs-

gerade.

Zwei gerade Linien, die sich kreuzen, haben stets einen bestimmten Schnittpunkt.

Worauf ich nun in diesem Zusammenhange Ihre besondere Aufmerksamkeit zu lenken habe, ist die Verbindung zwischen diesen beiden ganz verschiedenen Arten der Geometrie (entsprechend dem Übergange, der eben in der Arithmetik durch Einführung der E-funktion bewerkstelligt worde). Dass eine solche Verbindung besteht, wird stillschweigend von Jedermann zugegeben. Er wendet, obwohl die abstrakte Geometrie in ihren Grundlagen über die Bedingungen der praktischen Geometrie hinausgeht, die Ergebnisse der abstrakten Geometrie immer auf praktische Verhältnisse an. Soll dies in rationeller Weise geschehen, so ist nötig, dasjenige zu entwickeln, was die Fehlertheorie der praktischen Beobachtung genannt wird. Man sagt: Jede Beobachtung oder praktische Belästigung ist mit einem Fehler behaftet; richtiger würde man wohl sagen: Jede Beobachtung legt im Sinne der abstrakten Geometrie nicht bestimmte Grössen, sondern nur Spielräume für Grössen fest. Und die Frage, in welcher Form die abstrakte Geometrie in der praktischen Geometrie ihre Anwendung findet, beantwortet sich dann so:

Man hat zu untersuchen, innerhalb welcher Grenzen das Resultat der mathematischen Überlegung sich ändert, wenn man die Daten, die der Überlegung zu Grunde liegen, als innerhalb ihres Spielraums variabel ansehen will.

Ich gehe nun zum Ausgangspunkt dieser ganzen Betrachtung zurück, wo wir davon sprachen, dass wir die Zahlen als Punkte einer Abszissenachse deuten und hinzufügten, dass dieses praktisch nur mit beschränkter Genauigkeit geschehen kann. Wollen wir genaue Übereinstimmung haben, so kann dies nur durch ein Axiom geschehen.

Wir postulieren, dass jede abstrakte Zahl x (genau im Sinne unserer obigen Definition) einem und nur einem Punkte der Abszissenachse und ebenso jedem Punkt x eine und nur eine Zahl zugehören soll.

Dieses Postulat ist die Grundlage für die analytische Geometrie, sofern wir dieser präzisionstheoretischen Charakter beilegen wollen, sagen wir kurz für die Präzisionsgeometrie. Nun bestreite ich nicht, dass die Anschauung uns treibt, eine solche Festsetzung zu treffen, ich behaupte aber, dass wir mit unserer Festsetzung über die Anschauung hinausgehen. Wie ich damit meine, mache ich an zwei Beispielen klar, die

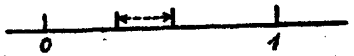
ich aus dem Gebiete der sog. „Mengenlehre" nehme, die in der heutigen Mathematik bekanntermaßen eine bedeutsame Rolle spielt (Menge, franz. ensemble, engl. aggregate)[1].

Eine Zahlenmenge und also infolge unserer Definition auch eine Punktmenge (welche der Abzissenachse angehört) ist ein Inbegriff irgendwelcher Zahlen und Punkte x, so definiert, daß wir von jeder vorgegebenen Zahl oder jedem Punkte x entscheiden können, ob er zu dem Inbegriff gehört oder nicht.

Lassen Sie uns zwei einfache Punktmengen als Beispiele wählen:

α) alle rationalen Zahlen oder Punkte $x = \frac{m}{n}$ von 0 bis 1.

Diese liegen auf der Strecke 01 „überall dicht". Nehmen Sie ein noch so kleiner Teilintervall, wo enthält es immer noch rationale Zahlen in unendlicher Zahl, und doch ist diese Strecke (wenn eine so grobe Ausdrucksweise statthaft ist) noch durchlöcherter wie ein Sieb, da ja unbeschränkt viele irrationale Zahlen, die nach der Definition unserer Punktmenge nicht



[1] Die Mengenlehre der neueren Mathematik kann geradezu als eine Lehre von der unabhängigen Variablen aufgefaßt werden.

angehören, noch auf ihr Platz finden sollen! Hier frage ich: Kann man sich dies räumlich vorstellen, eine überall dichte Punktmenge, die das Kontinuum noch nicht erschöpft? die abstrakte Definition ist klar, die Vorstellung jedenfalls für mich unmöglich.

b/ alle Zahlen von 0 bis 1 mit Ausschluss der Grenzen 0 und 1 d.h. eine Strecke, von der die Endpunkte abgetrennt sind.

Unsere räumliche Vorstellung scheint uns doch zu lehren, dass man keine Strecke aufhören lassen kann, ohne das Ende auch wirklich der Strecke zuzuzählen. Also auch den Inbegriff aller Zahlen von 0 bis 1 mit Ausschluss der beiden Grenzpunkte wird man sich räumlich kaum vorstellen können, so gewiss damit eine wohl definierte Menge gegeben ist.

Diese Bemerkungen haben eine wichtige methodische Folge, die ich so formuliere:

Da die Gegenstände der abstrakten Geometrie nicht als solche von der räumlichen Anschauung scharf erfasst werden, kann man einen strengen Beweis in der abstrakten Geometrie nie auf bloße Anschauung gründen, sondern muss auf eine logische Ableitung aus dem als exakt vorausgesetzten Axiomen zurückgehen[1].

[1] Dieser Forderung wird heutzutage vermutlich

Darum behält aber auf der andern Seite die Anschauung auch in der Präzisionsgeometrie ihren grossen und nicht durch logische Überlegungen zu ersetzenden Wert. Sie hilft uns die Beweisführung leiten und im Überblick zu verstehen, sie ist ausserdem eine Quelle von Erfindungen und neuen Gedankenverbindungen. Man vergl. hier die Antrittsvorlesung:

O. Hölder: Anschauung und Denken in der Geometrie, Leipzig 1900.

Ich habe in dem Vorigen den Unterschied zwischen Präzisionsmathematik und Approximationsmathematik betont und hervorgehoben, dass erst beide zusammen die ganze Wissenschaft ergeben. Der Fehler, an welchem der heutige Betrieb der Wissenschaft krankt, ist der, dass sich die Theoretiker zu einseitig mit der Präzisionsmathematik beschäftigen, während die Praktiker die Approximationsmathematik gebrauchen, ohne mit der Präzisionsmathematik Fühlung zu haben.

Den in Betracht kommenden Gegensatz von Theoretiker und Praktiker will ich noch an einem weiteren Beispiel erläutern, welches ich dem üblichen Un-

---

jeder theoretische Mathematiker zustimmen; überzeugend erscheint mir dieselbe aber in der Tat erst, wenn sie so, wie im Texte geschehen, auf der Ungenauigkeit unserer räumlichen Auffassung begründet wird.

Unterrichtsbetriebe der elementaren Geometrie entnehme.

Die Elementargeometrie wird seit Euklid vorwiegend als Präzisions-mathematik betrieben und es werden bei ihr also gewisse Axiome (die als genau postuliert werden) an die Spitze gestellt, aus denen dann rein logisch neue Sätze und Beweise abgeleitet werden. Die Folge ist, daß Unterscheidungen nötig werden, die über die Anwendungen hinausgehen.

In dieser Beziehung erwähne ich zuerst den Unterschied zwischen kommensurablen und inkommensurablen Strecken.

Bemerken Sie, daß wenn wir mit beschränkter Genauigkeit beobachten, dieser Unterschied überhaupt fortfällt. z.B. ist die Diagonale des Einheitsquadrates $\sqrt{2} = 1,414\ldots$ Wir können diesen Dezimalbruch in Annäherung mit $14/10$, $141/100$, $1414/1000$ bezeichnen d.h. ihn durch den Quotienten zweier ganzer Zahlen soweit annähern, wie ein noch so kleiner gegebener Schwellenwert verlangt. Setzen wir den Schwellenwert z.B. gleich $1/10^6$, so ist damit jegliches praktische Bedürfnis der messenden Geometrie gedeckt. Darüber hinaus zu gehen hat nur theoretisches Interesse. Also:

Der Unterschied von kommensurabel und inkommensurabel in reiner strengen Form (und also der

Begriff der Irrationalzahl / gehört ausschließlich der Präzisionsmathematik an.

In welchem Sinne wird aber der Praktiker die Worte: kommensurabel und inkommensurabel gebrauchen, wenn er sie nicht völlig aus seinem Sprachschatze verbannen will?

Ich denke im Augenblick wesentlich an die Astronomen, und speziell an ihre Störungstheorieen. Nehmen Sie z.B. die Einwirkung des Jupiter auf einen kleinen Planeten, etwa Pallas. Was meint der Astronom damit, wenn er das Verhältnis der Umlaufszeiten von Pallas und Jupiter kommensurabel nennt? Wie groß die Umlaufszeit eines Planeten ist, läßt sich wegen der Störungen verschiedenster Art, die dabei in Betracht kommen, von vornherein nur mit beschränkter Genauigkeit, d.h. in den üblichen Einheiten ausgedrückt nur bis auf eine bestimmte Anzahl Dezimalen genau angeben. Wenn also der Astronom sagt: 2 Planeten haben kommensurable Umlaufszeiten, so kann er damit nur meinen, daß sich die gefundenen Umlaufszeiten wie zwei kleine ganze Zahlen verhalten, im Falle des Jupiter und der Pallas wie 18 : 7. Wäre das bei irgend einer Beobachtung oder Rechnung gefundene Verhältnis

aber z.B. 180000 : 7327, so würde man die Umlaufszeiten nicht mehr kommensurabel nennen, da wir mit so grossen Zahlen bereits die Grenze überschritten haben, innerhalb deren eine Definition der Vorher Umlaufszeit gegeben werden kann.

Gehen wir nun an der Hand des Euklid weiter und stellen uns die Frage:

Ist eine vorgelegte Aufgabe durch Zirkel und Lineal lösbar d.h. führt eine endliche Anzahl Anwendungen der genannten Instrumente zu einer Lösung?

Auch hier müssen wir antworten:

Die Frage, ob eine Strecke durch Zirkel und Lineal konstruierbar ist, gehört ebenfalls in den Bereich der Präzisionsmathematik; sie bezieht sich darauf, ob unter der Voraussetzung der Axiome eine genaue Lösung möglich ist.

In dieser Hinsicht hat das Altertum uns bekanntlich 3 fundamentale Aufgaben als vermutlich unlösbar hinterlassen, deren Unlösbarkeit dann in der Tat von der Neuzeit bewiesen wurde. Es sind dies:

a) die Dreiteilung eines beliebigen Winkels
b) die Verdoppelung des Würfels d.h. die Konstruk-

tion von $\sqrt[3]{2}$,

c) <u>die Quadratur des Kreises</u> d. h. die Konstruktion der Zahl $\pi = 3,1415926\ldots$ aus der Einheitsstrecke.

Worauf ich angegenwärtiger Stelle aufmerksam zu machen habe, ist dieses, daß die ganze Behauptung: es sei unmöglich die Aufgaben a) - c) durch eine endliche Anzahl von Anwendungen des Zirkels und Lineals zu lösen, der Präzisionsmathematik und nicht der Approximationsmathematik angehört. Praktisch kann man jede der Aufgaben mit beliebig begrenzter Genauigkeit mit Zirkel und Lineal lösen. So läßt sich π z. B. leicht durch Konstruktion der einem Kreise ein- und umgeschriebenen Vielecke annähern; es sind aber auch weit einfachere und oft sehr sinnreiche Approximationen gegeben. Auch ist das rein praktische Verfahren oft am Platze. Um praktisch einen Winkel in 3 gleiche Teile zu teilen, wird man solange probieren bis die Teilung mit hinreichender Genauigkeit glückt, eine Methode, die praktisch viel besser ist, als wenn man bis auf einige Dezimalen erst die Sache ausrechnet und dann die Lösung in die Figur einträgt; (vergl. die Konstruktion der Kreisteilungsmaschinen).

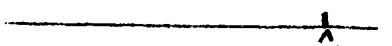
Übrigens wenne ich zur ersten Orientierung über

die genannten 3 Aufgaben, bezw. über die Beweise betreffend die Unmöglichkeit der elementaren Auflösung meine kleine Schrift:

F. Klein: Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementarmathematik, Leipzig 1895.

Ich knüpfe nunmehr wieder an unsere Entwickelungen über die Punktmengen an. Wir waren zu dem Schlusse gekommen, dass wir bei Beweisen der Präzisionsmathematik uns nicht kurzweg auf die Anschaulichkeit berufen dürfen, so wichtig die Figur sein mag, um uns über die generellen Voraussetzungen des jeweiligen Beweises zu orientieren. Ich gebe jetzt zwei sehr einfache Sätze über Punktmengen, bei denen dies bereits zur Geltung kommt; es wird darauf ankommen zu verstehen, was die bezüglichen Beweise eigentlich leisten.

1) Es sei eine Punktmenge gegeben, die nicht über daraufhin der Abszissenachse festgegebenen Wert a hinausgeht (sie braucht nicht bis zu a heranzureichen). Die Behauptung lautet dann: Es gibt einen oberen Grenzpunkt der Menge.



2) Es sei eine Punktmenge gegeben derart, dass zwischen A und B unendlich viele Punkte der Menge liegen,

so gibt es zwischen A und B (über eine Verdichtungsstelle d.h. eine Strecke, an der sich die Punkte der Menge unbegrenzt häufen.

Wenn man zuerst solche Sätze hört, so erscheinen einem dieselben vielleicht selbstverständlich. Allerdings sind sie selbstverständlich, aber in dem höheren Sinne, der die Summe aller mathematischen Einsicht ist, dass nämlich die Mathematik im Grunde überhaupt die Wissenschaft von den selbstverständlichen Dingen ist. Wir wollen und können bei unseren Sätzen nicht überraschen oder bringen, sondern haben nur deutlich zu sehen, wie sich die Sätze klar an den Zahlbegriff anschliessen, den wir bei unserem Entwickelungen an die Spitze gestellt haben:

Wie ist es mit unserem ersten Satz?

Die Punktmenge ist wohl definiert d.h. wir können von einem Punkte entscheiden, ob er der Menge angehört oder nicht. Es kann nun sein, dass ein Punkt, der wirklich die grösste Abszisse hat, der Menge angehört, dann repräsentiert er ohne weiteres die gesuchte obere Grenze. Es kann aber die Menge auch so beschaffen sein, dass kein oberster Punkt vorhanden ist, d.h. sie repräsentiert uns, wenn wir ihre Punkte nach den Grössen der Abszissen ordnen, eine stets wachsende Menge, hat aber,

trotzdem sie nicht über einen gewissen Punkt a der Abszissenachse hinausgeht, kein Maximum. (Ein Beispiel ist die von uns bereits betrachtete Menge aller Punkte zwischen 0 und 1 mit Ausschluß der Grenzen). In diesem Falle werden wir unter dem Grenzpunkt einen Punkt verstehen, der selber der Menge nicht angehört, unterhalb dessen aber in beliebiger Nähe noch Punkte der Menge liegen. Nennen wir den Punkt x und die kleine Strecke ε, so können wir auch sagen:

Der Punkt x heißt der obere Grenzpunkt, auch wenn er selbst der Menge nicht angehört, falls nur im Intervall x und x − ε, wie klein auch ε sein mag, immer noch Punkte der Menge gefunden werden.*)

Nachdem wir uns hierüber verständigt, haben wir unsere Definition des Zahlbegriffs (die wir an die Idee der unendlichen Dezimalbrüche anknüpfen) heran und verfahren folgendermaßen:

Um den Grenzpunkt, den wir suchen, zu definieren, untersuchen wir zunächst, welche ganze Zahlen von Punkten der Menge überschritten werden, welche nicht. Dies ist möglich, da wir die Menge als wohldefiniert voraussetzten. a sei die größte ganze Zahl, die

*) Da ε beliebig klein sein darf, so werden zwischen x und x − ε bei gegebenem ε dann noch immer unendlich viele Punkte der Menge liegen.

noch überschritten wird, so dass $a+i$ nicht mehr überschritten wird.

Nunmehr teilen wir dies Intervall in 10 gleiche Teile und erhalten so die Zahlen:

$$a;0 \quad a;1 \quad a;2 \ldots\ldots a;9 \quad a+1;0$$

Wir vergleichen diese Zahlen mit den Punkten unserer Menge und finden wieder eine grösste Zahl $a;b$, die noch überschritten wird, so dass $a;b+1$ nicht überschritten wird. [1]

Wir teilen das so erhaltene kleinere Intervall abermals in 10 Teile und haben:

$$a;b,0 \quad a;b,1 \ldots\ldots a;b,9 \quad a;b+1,0.$$

Hier wiederholen wir dieselbe Operation und erhalten zwei Zahlen $a;b,c$ und $a;b,c+1$.

Man sieht, wie der Prozess weiter geht und wie wir auf diese Weise das Intervall stets einengen d.h. zwei Zahlen erhalten, die in immer mehr Dezimalen übereinstimmen und somit — nach der von uns gemachten Voraussetzung — schliesslich als identisch anzusehen sind.

Wir legen also gesetzmässig einen in allen unendlich vielen Ziffern definierten Dezimalbruch fest, der uns den Grenzpunkt repräsentiert. Ich fasse vielleicht den Gedanken des Beweises so kurz zusammen:

---

1) Es kann $b=9$ sein, so dass $a;b+1 = a+1;0$ ist.

Nachdem wir einmal die allgemeine Zahl durch einen in allen unendlich vielen Ziffern festgelegten Dezimalbruch definiert haben, geht unser Beweis jetzt darauf hinaus zu zeigen, daß der Grenzpunkt, dessen Existenz behauptet wird, in der Tat durch einen solchen exakten Dezimalbruch berechnet werden kann.

Für diese hier benutzte Kreisteilung der endlichen Dezimalbrüche hat R. Dedekind, der 1872 zum ersten Male die scharfen Begriffsbestimmungen im Gebiet der irrationalen Zahlen herausgearbeitet hat, in seiner Note über Stetigkeit zu den klassischen Werken zählenden Arbeit:

R. Dedekind: Stetigkeit und irrationalzahlen, Braunschweig 1872,

das charakteristische Wort „Schnitt" eingeführt. Er legt geradezu den allgemeinen Zahlbegriff durch einen Schnitt fest, den er im Gebiete der rationalen Zahlen macht, indem er auf die eine Seite die rationalen Zahlen nimmt, welche von der zu definierenden Zahl überschritten werden, auf die andere Seite die rationalen Zahlen, welche nicht überschritten werden.

Diese Idee des Dedekindschen Schnittes kommt allerdings hier bei uns nicht in ihrer rein abstrakten Formulierung zur Geltung, da wir – hierin von Dedekind abweichend – der Einfachheit halber die De-

finition der Zahl an ihre Darstellung durch einen Dezimalbruch anschlossen. Im Übrigen rekapituliere ich den Gedanken unseres Beweises so:

Wir beweisen die Existenz des oberen Grenzpunktes, indem wir das Mittel angeben, ihn als exakten Dezimalbruch wirklich herzustellen.

Bei dem zweiten Satze, der von K. Weierstraß wegen seiner Bedeutung für die Funktionentheorie stets besonders in seinen Vorlesungen hervorgehoben wurde, tun wir der Allgemeinheit keinen Abbruch, wenn wir die Grenzen, zwischen denen die aus unendlich vielen Punkten bestehende Punktmenge mindestens eine Verdichtungsstelle haben soll, als die beiden auf einen der folgenden ganzen Zahlen a und a + 1 annehmen. Bezeichnen wir die Verdichtungsstelle mit x_0 und mit ε eine beliebig kleine Grösse, so ist die Definition der Verdichtungsstelle:

x_0 heißt eine Verdichtungsstelle, wenn zwischen $x_0 - \varepsilon$ und $x_0 + \varepsilon$, wie klein auch ε sein mag, immer noch unendlich viele Punkte der Menge liegen.[1]

Wir führen den Beweis unseres Satzes wieder in der Weise, daß wir einen Dezimalbruch x_0, der die verlangte Eigenschaft hat, wirklich herstellen, oder vielmehr

[1] Wir können auch sagen (was auf dasselbe hinauskommt): „immer noch Punkte der Menge liegen."

uns überlegen, wie wir ihn in jedem konkreten Fall herstellen können.

Wir teilen zunächst das Intervall a bis a + 1 wieder in 10 gleiche Teile:

$a;0 \quad a;1 \quad a;2 \ldots\ldots\ldots a;q \quad a+1;0$

und überlegen uns, daß mindestens in einem dieser Intervalle von den unendlich vielen Punkten unserer Menge unendlich viele Punkte liegen. (Es scheint dies keiner besonderen Begründung zu bedürfen, sondern logisch evident zu sein.) Das betreffende Intervall sei $a;b \quad a;b+1$. Für dieses nur $1/10$ der ursprünglichen betragende Intervall wiederholen wir denselben Schluß, nachdem wir zuvor auch hier 10 Teilintervalle

$a;b,0 \quad a;b,1 \ldots\ldots\ldots a;b,q \quad a;b+1,0$

gebildet haben. Das so erhaltene Intervall ($1/100$ der ursprünglichen), in dem noch unendlich viele Punkte unserer Menge liegen, sei $a;b,c \quad a;b,c+1$. Sie sehen, wie wir zu immer kleineren Intervallen kommen und schließlich ein Intervall x_0 erhalten, dessen Grenzen sich beliebig wenig von einander unterscheiden. Dieses Intervall nennen wir die Zahl x_0 und der zugehörige Punkt x_0 heißt dann ein Verdichtungspunkt. Sie bemerken also auch hier:

Die Existenz eines Verdichtungspunktes x_0 wird

in der Weise gezeigt, daß man das x_1 durch einen nach bestimmten Regeln verlaufenden Prozeß als Dezimalbruch gewinnt, womit wir auf unsere Grunddefinition der Zahl als einen in allen reinen Stellen bestimmten Dezimalbruch zurückfallen.

Diese beiden hier herangezogenen Sätze über Punktmengen sollten Ihnen ein Beispiel dafür sein, was das für Dinge sind, die die Präzisionsmathematik schon im Bereiche einer einzelnen unabhängigen Variablen behandelt, und wie hier die Beweise zu führen sind, wo wir vermöge der von uns festzuhaltenden absoluten Genauigkeit, nach der von mir vertretenen Auffassung über die Anschauung hinausgehen. —

Alles Bisherige bezog sich nur erst auf die Definition der unabhängigen Veränderlichen x. Gehen wir jetzt zu den

I, 2 Funktionen $y = f(x)$ von x.

Funktionen $y = f(x)$

über und fragen uns, was ist hier vom Standpunkte der Präzisionsmathematik, was vom Standpunkte der Approximationsmathematik zu sagen.

Die allgemeinste Definition der Funktion über

die wir in der modernen Mathematik verfügen, beginnt damit, festzulegen, welche Werte die unabhängige Veränderliche x annehmen soll. Wir setzen fest, x soll eine gewisse „Punktmenge" durchlaufen, (wobei die Sprechweise also gemeint ist, aber durch das zentrale geometrische Axiom (pg. 17) festgelegt ist, was damit arithmetisch gemeint ist).

y heißt dann eine Funktion von x (y = f(x)) innerhalb der Punktmenge, wenn zu jedem x der Menge ein bestimmtes y gehört (dabei x und y als scharf definierte d.h. als Dezimalbrüche mit wohl definierten Ziffern gefaßt)

Gewöhnlich ist die Menge, die x durchläuft, das Kontinuum d.h. sämtliche Punkte zwischen 2 festen Punkten m und n. Man nennt in anderer Sprechweise ein solches Kontinuum ein Intervall $\overline{mn}$. Wir erhalten damit die ältere Definition einer Funktion, wie sie z.B. P.G. Lejeune-Dirichlet gebrauchte:

y heißt eine Funktion von x in einem Intervall, wenn zu jedem Zahlenwerte x, der in dem Intervalle liegt, ein wohldefinierter Zahlenwert y zugehört.

Dies wäre die allgemeinste Definition des Funktionsbegriffes in der Präzisionsmathematik. Wiederum verweise ich auf ein Referat von A. Pringsheim in der mathematischen Encyklopädie:

A. Pringsheim: Allgemeine Funktionentheorie,

Encyklop. der math. Wiss. Bd. 2, pg. 1 ff, wo in schöner Weise dargestellt ist, wie die allgemeine Definition der Funktion zur Geltung gekommen ist.

Was ich nun auf der andern Seite über den Funktionsbegriff in der empirischen Mathematik zu sagen gedenke, habe ich bereits vor 30 Jahren in meiner oben (am Schlusse der Einleitung) zitierten Arbeit über den allgemeinen Funktionsbegriff dargelegt. Sie können das hier unmittelbar Folgende als eine Ausführung der damals skizzierten Ideen ansehen.

Der einzige Autor, der in Lehrbüchern ähnliche Ideen entwickelt, ist M. Pasch[1] der 1882 zwei Schriften veröffentlichte, in denen trotz ihres geringen Umfanges sehr interessante Überlegungen vorkommen. Es sind dies:

M. Pasch: Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882 (wo er mit den empirisch gegebenen Punkten und Geraden beginnend zu abstrakten Formulierungen aufsteigt),
und namentlich:

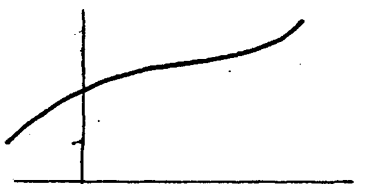
---

[1] P. du Bois-Raymond handelt in seiner „Allgemeinen Funktionentheorie, Tübingen 1882" zwar auch fortgesetzt von dem Unterschiede der „idealistischen" und der „empiristischen" Auffassung (denen er auf die Raumanschauung als solche überträgt), nimmt dann aber keine positive mathematische Wendung, sondern verliert sich in der Aufspürung der von dort aus nach seiner Meinung entspringenden Antinomien.

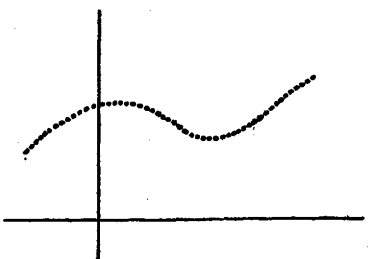
M. Pasch: Einleitung in die Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1882. Dieses Buch möchte ich anläßlich meiner Vorlesung Ihrer Aufmerksamkeit ganz besonders empfehlen; man vergleiche auch die parallellaufenden Erläuterungen von Pasch in „Mathematischen Annalen" Bd. 36 (1889), pg. 130 – 131.

Nach diesem litterarischen Exkurs fragen wir:
Wie mag uns in der empirischen Geometrie eine solche Gleichung $y = f(x)$ entgegentreten?

Wir legen ein rechtwinkeliges Koordinatensystem fest und fragen, wie weit uns y als Funktion von x durch eine



Kurve gegeben ist, die wir uns entweder durch einen kontinuierlichen Federstrich zeichnen oder uns auch durch einen Registrierapparat, (der etwa die Temperatur als Funktion der Zeit liefert) gegeben denken. Übrigens können wir uns eine Kurve auch festlegen, indem wir gar keinen kontinuierlichen Zug machen, vielmehr diskontinuierlich einzelne Punkte aneinander reihen. Allerdings erscheint uns aus



der Nähe gesehen das Punktaggregat als diskontinuierlich, trotzdem aber haben wir das Gefühl, daß uns dasselbe eine ganz bestimmte Kurve festlegt, und aus der Ferne

betrachtet glauben wir sogar eine kontinuierliche Kurve zu sehen.

Wer uns hier an einem einfachen Beispiele entgegentritt, ist übrigens eine Eigentümlichkeit unseres Gesichtssinnes, die auch sonst zur Geltung kommt. Blicken Sie z. B. auf einen entfernten Wald, aus dem nicht gerade einzelne Bäume besonders hervorragen, so meinen Sie einen kontinuierlichen Contour zu sehen, ebenso setzen Sie diese Eigentümlichkeit unseres Sehens voraus, wenn Sie von einem Umriß eines behaarten menschlichen Kopfes sprechen. Wir müssen also sagen:

Eine grosse Anzahl kleiner Gegenstände dicht beieinander gesehen läßt in uns die Vorstellung des Kontinuums entstehen.

Ich hatte vorhin von einem kontinuierlichen Federstrich gesprochen. Wenn wir ihn aber mit einem genügend scharfen Mikroskop betrachten würden, würde er sich als aus vielen kleinen Flecken zusammengesetzt erweisen. Wir haben also unserm letzten Satze noch hinzuzufügen.

Auch wenn wir glauben ein Kontinuum vor uns zu haben, wird uns die genauere Betrachtung häufig überzeugen, daß wir nur die dichte Aufeinanderfolge kleiner Teilchen betrachten.

Ich habe diese Eigentümlichkeit hier zunächst nur

bei der Gesichtswahrnehmung neben einander liegender Gegenstände zur Sprache gebracht. Sie gilt aber auch bei zeitlich auf einander folgenden Wahrnehmungen. Die Tatsache, daß in kurzen Intervallen auf einander folgende Gesichtseindrücke sich verschmelzen, als ob ein Kontinuum vorliege, beobachten wir besonders schön beim Kinematographen oder Mutoskop.

Zu untersuchen, wie dies zu erklären ist, ist Sache der Physiologen und Psychologen. Ich will hier nur erwähnen, daß die Elemente unserer Netzhaut aus diskontinuierlich an einander gereihten Nervenstäbchen bestehen, und daß wahrscheinlich jedes einzelne Stäbchen nur einen bestimmten Gesichtseindruck fortpflanzen kann, sodaß also für uns zwischen der Beobachtung eines wirklichen Kontinuums und einer Menge in hinreichend kleinen Räumen auf einander folgender Dinge kein Unterschied ist. Aber ein wirkliches Urteil darüber, wie weit physiologische und psychologische Untersuchungen über das Zustandekommen des Sehens, über die Struktur der Netzhaut, über die chemischen Veränderungen, die das Licht auf der Netzhaut durch Bestrahlung hervorbringt, über die Dauer dieser Veränderungen u. s. w. gestatten, näher in die Tatsachen der sinnlichen Wahrnehmung einzudringen, muß ich selbstverständlich dem Fachmann überlassen. Wir be-

rufen uns hier nur auf die Tatsache als solche.

Im Anschluß an unsere letzten Ausführungen fragen wir nun:

In welcher Weise wird vermöge einer empirischen Kurve y als Funktion von x bestimmt?

Wir antworten, x und y sind beide nur bis auf einen Schwellenwert genau festgelegt. Daher:

Die empirische Kurve legt y nicht als scharfe Funktion von x fest, sondern definiert das einem x zugehörige y nur mit einem begrenzten Grade von Genauigkeit.

Wir schreiben dies etwa:

$y = f(x) \pm \varepsilon$, wo das unbestimmt bleibende ε (das wir uns gegebenenfalls wieder als eine Funktion von x denken mögen) der Ungleichung genügen wird:

$|\varepsilon| \leq \delta$ d.h. der absolute Betrag dieser kleinen Grösse ε liegt unterhalb der Schwellenwertes δ.

Ein solches Gebilde $y = f(x) \pm \varepsilon$, von gewisser Breite, habe ich in der erwähnten Arbeit (1873) einen „Funktionsstreifen" genannt, so daß wir auch kürzer sagen können.

Die empirisch gegebene Kurve definiert uns nicht eine Funktion, sondern einen Funktionsstreifen.

Wenn also der Verlauf der Funktion durch eine empirisch gegebene Kurve nur bis zu einem gewissen Grade genau versinnlicht werden kann, so stellen wir nun,

mehr die mehr philosophisch-psychologische Frage in den Vordergrund, die ich schon oben als kontrovers bezeichnete:

Kann man sich eine Funktion unter dem Bilde einer räumlich angeschauten Kurve exakt vorstellen?

Dies „Vorstellen" einer Kurve ist nicht mit der Auffassung des Gesetzes zu verwechseln, nach dem auf Grund der als absolut richtig vorausgesetzten Axiome die Kurve scharf definiert werden kann. Vielmehr handelt es sich um die lebendige Erfassung einer konkreten Gestalt. 1/

Meine Antwort auf die gestellte Frage ist nach dem, was ich oben über die Vorstellbarkeit von Punktmengen auf der Abszissenachse sagte, nicht mehr überraschend; ich habe sie bereits in der genannten Note von 1873 so formuliert:

Auch wenn man sich eine Kurve nicht zeichnet oder mit dem Auge verfolgt denkt, sondern wenn man sie sich nur „vorstellt", hat die Kurve eine beschränkte Genauigkeit und entspricht also nicht dem scharfen Funktionsbegriff der Präzisionsmathematik, sondern der Idee des Funktionsbereiches.

Die Richtigkeit dieser Auffassung soll weiterhin in der Weise hervortreten, daß ich an der Hand der Axio-

---

1/ Gehirntätigkeit, bei der die Nervenelemente der Netzhaut nicht direkt beteiligt sind: wohl aber diejenigen Gehirnteile, von denen die Nerven der Netzhaut auslaufen.

me die mannigfaltigsten Kurven klar definieren wer„ de, die man sich ganz gewiss nicht fertig vorstellen kann (so gewiss man das Gesetz ihrer Erzeugung klar versteht).

Eine entgegenstehende Ansicht ist in der mathemati„ schen Litteratur insbesondere von A. Köpke (Hamburg) in den Math. Ann. 29 (1887) vertreten worden. Ich gehe darauf um so lieber ein, weil ich annehme, dass diese Ansicht, wenn auch nicht in scharf formulierter Form, weit verbreitet ist.

Um den Standpunkt Köpke's verstehen zu können, muss ich etwas vorwegnehmen, was ich später ausführ„ licher behandeln werde.

Unter den Funktionen gibt es eine besondere Klasse, die der stetigen Funktionen, die wieder als besondere Unterklasse die differentiierbaren Funktionen in sich schliessen. Ist die Differentiation beliebig oft möglich, so heissen die Funktionen unbeschränkt differentiierbar.

Köpke sagt nun, dass wir uns diejenigen Kurven $y = f(x)$ genau vorstellen können, deren $f(x)$ nicht nur stetig, sondern auch unbeschränkt differentiierbar ist, dass wir aber auf der andern Seite solche Kurven, die stetigen Funktionen ohne Differentialquotienten entsprechen, uns schlechterdings nicht vorstellen können.

Sie sehen, wie dies von meiner Ansicht abweicht.

Während ich behaupte, daß unsere räumliche Vorstellung an sich und immer ungenau ist, meint Köpke, daß sie völlig ausreichend sei für eine bestimmte Klasse von Funktionen, daß sie aber für andere Funktionen versage.

Man sollte meinen, daß die Physiologen und Psychologen sich mit dieser Frage beschäftigt hätten. Es scheint dies nicht der Fall zu sein, wie denn auch der einzige Autor, der außer Köpke und mir von mathematischer Seite an diese Fragestellung ausführlich herangetreten ist, M. Pasch in seinem bereits genannten Lehrbuche, sowie in den Math. Ann. 30 (1887) sein dürfte. So wenig wurden die wichtigsten Fragen behandelt, die auf den Grenzgebieten verschiedener Wissenschaften liegen. Im vorliegenden Falle dürfte für die Vernachlässigung der Fragestellung übrigens mit in Betracht kommen, daß die moderne Arithmetisierung der Mathematik (d. h. ihr konsequenter Aufbau auf Grund des modernen Zahlbegriffs) außerhalb der mathematischen Fachkreise immer noch wenig gekannt und noch weniger nach ihrer Wichtigkeit verstanden ist.

Um es lieber mache ich hier von mir aus einen kleinen

Exkurs über Naturphilosophie.

indem ich die folgende, durch den vorliegenden Zusammenhang gegebene Frage aufstelle:

Wenn wir eine scharfe Funktion $y = f(x)$ weder empirisch realisieren, nicht einmal uns ideell vorstellen können, wie steht es dann mit der Schärfe der sogenannten Naturgesetze? Sind sie exakt oder approximativ?

Nehmen Sie irgend ein Gesetz, wie es die Physik oder die Naturwissenschaft behandelt, z. B. das Fallgesetz:

$$y = \frac{gt^2}{2} + ct + c'.$$

Wie weit ist dieses Gesetz durch die Beobachtung gegeben. Wir müssen auch hier sagen: nur approximativ. Ebenso beschreibt ein seitlich geworfener Körper keine genaue Parabel, ja die ballistische Kurve kann beträchtlich von einer Parabel abweichen. Ein Tennisball vermag eine Kurve mit einer nach oben gerichteten Spitze zu beschreiben.

Wie kommen wir nun dazu, ein solches Gesetz als absolut genau zu formulieren und die Abweichungen störenden Einflüssen bezw. Beobachtungsfehlern zuzuschreiben?

Es kommt hier ein neues Prinzip in Betracht, das sog. Prinzip der Einfachheit der Naturerklärung oder der Ökonomie des Denkens (Mach), das sich in dem vorliegenden Falle so aussprechen läßt:

Bei der Aufstellung der Naturgesetze greift man (nicht erst auf Grund ausdrücklicher Überlegung, sondern unwillkürlich) nach den einfachsten Formeln, die die Erscheinung mit hinreichender Genauigkeit darzustellen vermögen.

Was hier speziell von den Fallgesetzen gesagt ist, gilt auch für die scheinbar gesichertsten Naturgesetze z. B. die Gesetze von der Konstanz der Masse und Energie.

Bei den meisten Versuchen (besonders chemischen) ist die Masse leidlich konstant, in einer Formel ausgedrückt,

$$M = \text{konst} + \varepsilon(t),$$

wo $\varepsilon(t)$ eine ihrem Betrage nach sehr kleine Funktion der Zeit ist, über welche man nichts Bestimmtes in Erfahrung gebracht hat.

Analoges gilt für die Energie. Auch sie ist bei den Versuchen leidlich konstant, aber von einer absoluten Genauigkeit ist gar nicht die Rede,[1] so daß wir sagen müssen

Auch unsere allgemeinsten und für die Weltauffassung wichtigsten Naturgesetze sind immer nur in einem beschränkten Bereich mit beschränkter Genauigkeit experimental bewiesen. Man möchte sagen:

---

[1] Diese Genauigkeit ist sogar bislang eine recht geringe, und jedenfalls sehr viel weniger beträchtlich als bei den Versuchen, durch welche die Konstanz der Masse nachgewiesen werden soll.

Die genaue Formulierung der Naturgesetze durch einfache Formeln beruht nur auf dem Wunsche die äussere Erscheinung durch möglichst einfache Hilfsmittel zu beherrschen.

Vom wissenschaftlichen Standpunkte aus sollte man bei jedem Naturgesetze – damit dasselbe nicht zu einem Dogma wird d. h. einem Satze, den wir für unumstößlich richtig halten, ohne mehr nach den Beweisgründen zu fragen – allemal die Frage stellen: Innerhalb welcher Genauigkeitsgrenzen ist dasselbe durch die Beobachtung erwiesen? Meist wird man finden, daß dies mit viel weniger Genauigkeit stattfindet, als man gewöhnlich glaubt.

Ich will das Gesagte an einem Beispiele belegen, das ich der Astronomie entnehme, d. h. derjenigen empirischen Wissenschaft, bei der die Genauigkeit am weitesten getrieben ist. Ich berufe mich dabei auf die autoritative Publikation:

S. Newcomb: The elements of the four inner planets and the fundamental constants of Astronomy, Washington 1895.

In diesem Werke hat Newcomb auf Grund seiner Lebensarbeit über die Bewegung der grossen Planeten für sämtliche sog. „astronomische Konstanten"

die besten Werte angegeben, welche die heutige Astronomie zu beschaffen weiß, sowie gleichzeitig den Spielraum, innerhalb dessen er sie als sicher bestimmt ansieht.

Auf pg. 118 – 120 äussert er sich darüber, wie genau das Newton'sche Gesetz der gegenseitigen Schwereanziehung zweier Massenteilchen:

$$f = \frac{k\, m\, m'}{r^2} \quad (k = \text{feste Konstante})$$

durch die Beobachtung bestätigt wird.

Er unterscheidet dreierlei Beobachtungsintervalle:

1) Beobachtungen auf der Erde, wo r zwischen einigen Dezimetern (Laboratoriumsversuchen) und der Länge des Erdradius variiert,

2) Beobachtungen bei denen das Intervall für r zwischen der Länge des Erdradius und der Sonnendistanz von der Erde liegt (Fallgesetze, Mond- und Erdbewegungen relativ zur Sonne),

3) Beobachtungen, bei denen r bis zu dem 20 fachen der Sonnendistanz anwächst (Bewegung der fernsten Planeten).

Was nun die Gültigkeit des Newton'schen Gravitationsgesetzes angeht bez. die Genauigkeit mit der dies Gesetz innerhalb der verschiedenen Intervalle durch die Beobachtung zweifellos konstatiert wird, so redet Newcomb die Unbestimmtheit,

1/ für das erstgenannte Intervall gleich 1/3,
2/ für das Intervall von der Länge des Erdradius bis zur Sonnendistanz gleich 1/5000,
3/ und nur für das Intervall bis zu den entfernten Planeten als sehr gering an.

Natürlich ist z.B. in dem ersten Intervall diese Genauigkeit nicht so zu verstehen, dass das Gesetz bis auf 1/3 falsch ist, sondern nur so, dass das vorhandene Erfahrungsmaterial einen Fehler bis zu 1/3 möglich erscheinen lässt.

Der Kuriosität halber füge ich hier an, dass der amerikanische Astronom Hall um bestimmten Irregularitäten in der Merkurbewegung Rechnung zu tragen, das Newton'sche Gesetz in der folgenden Form ansetzt:

$$f = \frac{k\,m\,m'}{r^{2{,}000\,000\,1574}}$$

Nach allem müssen wir also sagen, und damit beschließe meine These zu Recht:

Die Genauigkeit mit der die allgemein geltenden Naturgesetze zwingend durch das Experiment bewiesen sind, ist selbst im Falle des Newton'schen Anziehungsgesetzes nur eine sehr beschränkte.

Im Anschluss an diese Ausführungen lassen Sie mich gleich die naturphilosophische Frage zur Sprache bringen, welche die Göttinger philos. Fakultät in

dem bereits in der Einleitung genannten Gelaichten über die neueste Beneke-Preisfrage*) behandelt. Auch hier ist wesentlich von dem Unterschiede zwischen der approximativen Grössenschätzung und der strengen Zahldefinition die Rede. Besonders wird dort aber die Frage nach der intimen Konstitution der Materie berührt. (Sie werden bald sehen, wie dies mit unserm engern Gegenstande zusammenhängt).

Bei der Frage nach der intimen Natur der Materie gibt es zwei extreme Ansichten:

1) Die eine will die Materie als wirklich den Raum kontinuierlich erfüllend ansehen (Kontinuitätstheorie),

2) die andere als eine Anhäufung getrennter, streng punktförmiger Massen (extreme Atomtheorie).

Die Mehrzahl der Naturforscher steht heutzutage wohl in der Mitte. Sie sehen die Materie als molecular aufgebaut an, wobei aber die Moleküle nicht als Punkte gedacht werden, sondern als komplizierte Welten für sich, von nicht näher bekannter Beschaffenheit, ruhend in einem Kontinuum, dem „Lichtäther".

Der erste Extrem wird z. B. insbesondere von F. Ostwald und seiner Schule vertreten, die jegliche Atomtheorie perhorreszieren. Die zweite Auffassung ging von den französischen Mathematikern der klas-

*) Göttinger Nachrichten 1901, Geschäftliche Mitteilungen math. phys. Kl. 55 (1901). Vgl. den Abdruck am Schlusse der Vorlesungen.

rischen Schule, insbesondere Laplace, aus und blieb lange herrschend; z.B. gilt sie 1847 Helmholtz in seiner ersten Abhandlung noch als Zielpunkt. Die Annahme ist dabei, daß die getrennten „Massenpunkte" mit „Zentralkräften" aufeinander wirken. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Anschauungsweise, welche seit Newton in der Astronomie herrschend wurde.

Übrigens ist dies zweite Extrem gelegentlich noch wesentlich gesteigert worden. Man ging von der Frage aus: Sollte nicht, ebenso wie der Raum nur diskontinuierlich mit Materie gefüllt ist, auch die Zeit diskontinuierlich sein? d.h. kann nicht möglicherweise jede Bewegung also in nur diskontinuierlichen Zeitintervallen stattfindend, als sprunghaft aufgefaßt werden müssen? Man wird zu dieser Fragestellung geführt, wenn man sich die Wirkungsweise des Kinematographen überlegt, der uns notorisch diskontinuierliche Vorgänge als kontinuierliche Bewegung vortäuscht. In der Tat haben neuerdings W. K. Clifford und L. Boltzmann derartige Vorstellungen befürwortet:

W. K. Clifford: On the nature of forces; Roy. Inst. 1870 repr. in „Lectures and Essays" I

L. Boltzmann: passim.

Wie können so divergente Ansichten nebeneinander bestehen? Hier ist die bereitbigte Frage, bei der das eigentliche Interesse der Mathematikers in diesen Dingen anhebt. Wir müssen sagen:

Die verschiedenen Voraussetzungen werden gegebenenfalls mit Rücksicht auf die ungenaue Natur unserer sinnlichen Wahrnehmung gleich gute Erklärungen abgeben können, weil es sich bei der sinnlichen Wahrnehmung in der Tat nicht um Beziehungen der Präzisionsmathematik, sondern der Approximationsmathematik handelt.

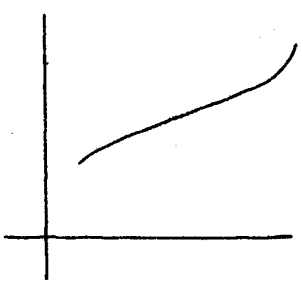
Die so aufgestellte Formulierung wird gern acceptiert werden. Aber im Grunde nimmt sie das Resultat erneuter mathematischer Betrachtung vorweg. Der Mathematiker hat weder die Fähigkeit noch die Aufgabe zu entscheiden, was der „Fall der Natur" ist, er muß das, soweit es überhaupt möglich ist, hier zu einem bestimmten Resultate zu kommen, dem berufenen Naturforscher oder Philosophen überlassen. Er kann aber entscheiden und will entscheiden, wie weit die verschiedenen Prämissen auf Grund geeigneter Voraussetzungen gegebenenfalls nahezu zu denselben Resultaten führen. In der

Tat eine grosse Aufgabe der Approximations-ma-thematik!

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wen-de ich mich wieder einer bestimmten Frage-stellung zu:

Jedermann verbindet mit der Idee der empi-rischen Kurve gewisse Attribute; ist es möglich den Begriff der exakten Kurve d.h. im vorliegenden Zusammenhange die Funktion $y = f(x)$ der Präzisions-mathematik so einzuschränken, dass wir analoge Attribute bei ihr wiederfinden?

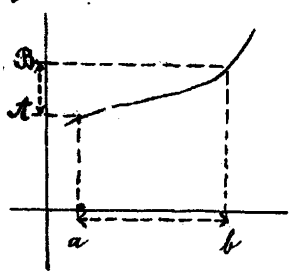
Ich führe die Attribute, an welche ich dabei denke, hier der Reihe nach auf:



1). Ein erstes Attribut, welches wir der empirischen Kurve tat-sächlich beilegen, ist die Konti-nuität d.h. wir haben die Vorstellung, dass sie in den kleinsten Teilen zusammenhängt.

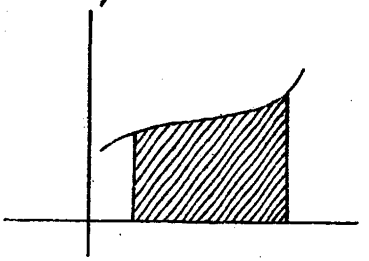
Dem wird entsprechen, dass $f(x)$ durch alle Zwi-schenwerte geht, oder genauer:

Ist $f(a) = A$ und $f(b) = B$, so sollen alle Werte zwischen A und B von $f(x)$ im Intervalle $x = a$ bis $x = b$ wirklich angenommen werden



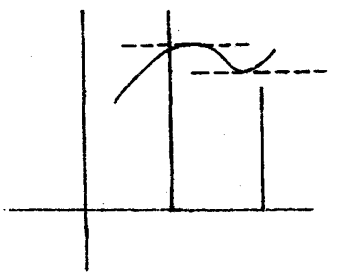
Wir werden lernen, daß die sogenannten „stetigen" Funktionen diese entsprechende Eigenschaft haben.

2.) Das zweite Attribut, das wir dem empirischen Verhalten der Kurve entnehmen, ist die Eigenschaft, ihrer Kontinuität entsprechend einen bestimmten Flächeninhalt abzugrenzen.

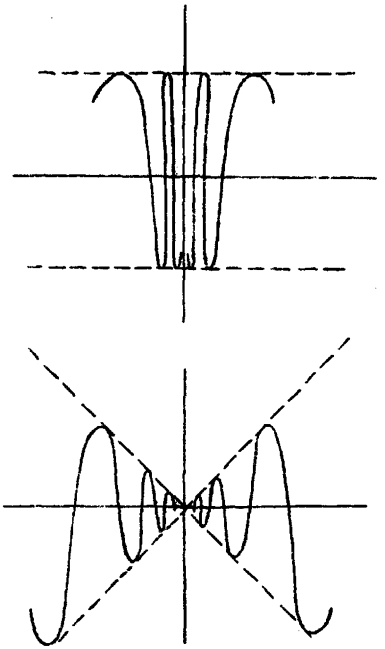


Hieraus ergiebt sich für die stetige Funktion $f(x)$ keine neue Einschränkung. Wir werden vielmehr finden, daß $\int f(x)\,dx$ bei jeder stetigen Funktion wohldefiniert ist, mit andern Worten, daß jede stetige Funktion integrierbar ist.

3.) Wir achten nun auf den Allgemeinverlauf der empirischen Kurve d.h. auf das Anwachsen resp. Abnehmen der Ordinate und finden, daß eine empirische Kurve notwendig in einem endlichen Intervall eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis darbietet.



Die stetige Funktion $y = f(x)$ schwankt auch zwischen Maximis und Minimis. Diese können aber in einem endlichen Intervall unendlich dicht liegen. Ist z. B. $y = \sin 1/x$, so schwankt die Funktion in dem Intervall $x = 2/\pi$ bis $x = -2/\pi$ unendlich oft zwischen



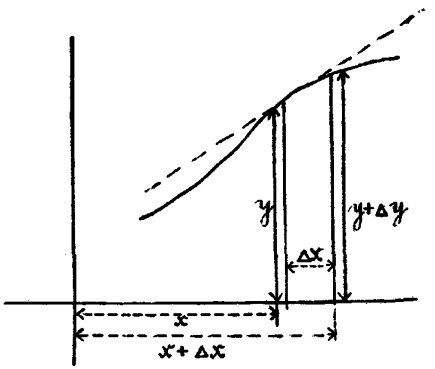
$y = +1$ und $y = -1$ hin und her (die Anzahl der Oscillationen wächst bei Annäherungen den Nullpunkt unbeschränkt.)

Oder wir wählen $y = x \sin 1/x$; so hat diese Funktion wiederum in einem endlichen Interrall zwischen $y = +x$ und $y = -x$ un„ endlich viele Maxima und Minima. Dies 2te Beispiel hat den Vorzug, daß die Funktion nicht nur rechts und links von Null, sondern auch im Nullpunkt selbst stetig ist.

Da also bei einer stetigen Funktion $y = f(x)$ keines„ wegs ausgeschlossen ist, daß dieselbe in einem endlichen Intervalle unendlich viele Maxima und Minima hat, so müssen wir, wollen wir in dieser Hinsicht eine Übereinstimmung mit der empirischen Kurve herstellen, dieser als besondere Bedingung ihr auferlegen. Wir drücken dies später gelegentlich so aus:

Die Funktion $y = f(x)$ soll im gerade betrachteten Intervalle in eine endliche Zahl monotoner Stücke zerfallen.

4/. Wir legen einer empirischen Kurve eine



Richtung bei. Was verstehen wir da unter Richtung? Wir wollen hier eine möglichst unbefangene Antwort geben d. h. nichts in die Definition hineinmengen, was wir etwa bereits aus der Differentialrechnung wissen.

Es repräsentiere uns die gezeichnete Kurve einen Strom von endlicher Breite d. h. die Ordinate y ist nur bis auf einen Schwellenwert ε bestimmt. (Ist die Breite des Stromes zu bedeutend, so müssen wir das Folgende auf einen Mittelstreifen desselben beziehen). Um nun die Richtung festzulegen, verfahren wir in praxi folgendermaßen:

Man nimmt auf der Abszissenachse ein Stück Δx, welches groß gegen die Breite des Stromes (Streifens) ist, aber klein gegenüber dem Gesamtverlauf des Streifens, sucht für die Abszissen x und x + Δx die Ordinaten y bez. y + Δy und verbindet deren Endpunkte durch eine gerade Linie. Diese ist dann natürlich nicht scharf bestimmt, denn die beiden Punkte, die sie verbindet, sind es ja nicht. Aber diese gerade Linie gibt das, was wir in praxi die Richtung des Streifens an der betrachteten Stelle nennen (und was nur mit mäßiger Genau-

igkeit bestimmt ist). Wir messen dieselbe durch den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$[1]. Wir können also kurz sagen:

Eine empirische Kurve hat an jeder Stelle eine Richtung, festgelegt innerhalb eines im Einzelfalle zu bestimmenden Spielraums durch den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, unter Δx eine Grösse von bestimmter Grössenordnung verstanden, d. h. klein gegenüber dem Gesamtverlauf, groß gegenüber dem Schwellenwert des Streifens. Die empirische Kurve stimmt erfahrungsgemäß mit der Verbindungsgeraden von x, y mit $x+\Delta x, y+\Delta y$ annähernd überein.

Hat nun auf der andern Seite jede stetige Funktion einen Differentialquotienten?

Wir definieren den Differentialquotienten als $\lim \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x=0}$ und schreiben dafür abkürzend $\frac{dy}{dx}$, wo die kleinen d andeuten sollen, daß wir uns den Grenzübergang gemacht denken. Dabei müssen wir aber bedenken, daß der Differentialquotient aus dem gerade besprochenen Differenzenquotienten durch einen doppelten Grenzübergang entsteht, der in ganz bestimmter Reihenfolge vollzogen werden soll, indem wir erstlich die Breite des Streifens und dann das Stück Δx der Abszisse unend, lich klein werden lassen.

[1] Noch allgemeiner könnte man $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ setzen, wo x_1 und x_2 links und rechts von x in geeignetem gegenseitigem Abstand genommen sind.

Als allgemeinen Grundsatz über Grenzübergänge stelle ich hier ein:

Was bei einem Grenzübergang herauskommt, kann a priori schlechterdings nicht gesagt werden, sondern muß jedesmal genau überlegt werden. Insbesondere aber ist bei einer Mehrzahl von Grenzübergängen deren Reihenfolge genau zu beachten.

Indem die Mathematiker früher diesen Grundsatz nicht immer befolgten, glaubten sie an die Existenz eines Differentialquotienten jeder stetigen Funktion. Man weiß aber jetzt seit den Untersuchungen von B. Riemann und K. Weierstraß (um 1860), daß stetige Funktionen als solche gar keinen bestimmten Differentialquotienten zu haben brauchen d. h. daß für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gegebenenfalls gar kein solcher Limes, wie wir ihn gerade definierten, existiert. Wir werden das weiterhin noch ausführlicher erläutern.

Wie mag wohl die gegenteilige Ansicht entstanden sein? Es ist nicht bestimmt zu sagen, wo der Fehlschluß lag, da eine richtige Auffassung allemal den Fehler ausschließt. Vielleicht aber können wir sagen:

Die verkehrte Annahme, daß eine stetige Funktion immer einen bestimmten Differentialquotienten habe, scheint dadurch hervorgerufen, daß man

bei unserer empirischen Kurve den Schwellenwert und das Stückchen Δx gleichzeitig verkleinert dachte, so zwar, daß das Wesentliche der Figur d. h. die Übereinstimmung der geraden Linie mit der Kurve für das Intervall Δx bestehen blieb. (Man hielt also auch bei der strengen Funktion im allgemein die Vergleichbarkeit mit einer geraden Linie für ein kleines Stück aufrecht).

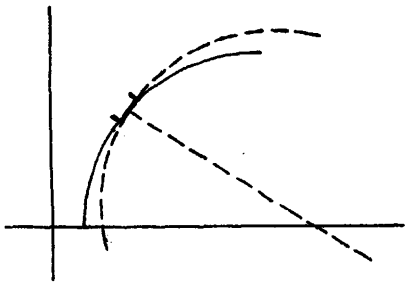
Wenn diese Interpretation richtig ist, so liegt der Fehlschluß darin, daß man zwei Grenzübergänge gleichzeitig und sozusagen in gleichem Maße machte, die vorschriftsmäßig nacheinander zu machen sind.

Wir werden uns die Nichtexistenz der Differentialquotienten bei geeigneten stetigen Funktionen später noch genauer klar machen. Hier genügt es uns zu wissen, daß eine stetige Funktion keinen Differentialquotienten zu haben braucht, sodaß wir also, wenn wir in Übereinstimmung mit unserer empirischen Kurve, die doch sicher eine Richtung hat, bleiben wollen, die Existenz eines Differentialquotienten der stetigen Funktion als Bedingung auferlegen müssen.

5) Ebenso ist es bei jeder empirischen Kurve keine Frage, daß sie eine Krümmung besitzt.

Die Krümmung einer Kurve wird dabei durch den reziproken Wert $1/\rho$ des Radius ρ eines Kreises gegeben, der

durch drei zweckmäßig gewählte, sogenannte, aufeinanderfolgende Punkte der Kurve geht. Sind die 3 Punkte



$$x\,y \quad x+\Delta x,\ y+\Delta y \quad x+2\Delta x,\ y+2\Delta y+\Delta_2 y,$$

so kommt wesentlich für die Krümmung die zweite Differenz $\Delta_2 y$, oder wenn wir durch $(\Delta x)^2$ dividieren, der zweite Differenzenquotient $\frac{\Delta_2 y}{(\Delta x)^2}$ in Betracht. Er gibt das Maß der Abweichung von der geraden Linie ($\Delta_2 y = 0$) beim Weiterverlauf. Durch Einsetzen der Funktionswerte können wir ihn auch in der Form schreiben:

$$\frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2}.$$

Wie werden wir die 3 Punkte praktisch wählen? Auch wieder in solchen Abständen, die gegen die Breite des Streifens groß, gegen seinen Gesamtverlauf klein sind. Die Schärfe, mit der der 2te Differenzenquotient oder dem nach die Krümmung bei einem empirisch vorgelegten Streifen gemäß unserer Festsetzung definiert werden kann, ist, weil jetzt 3 Punkte auf dem Streifen verschieblich sind, jedenfalls geringer als die Schärfe, mit der wir den ersten Differenzenquotienten und damit die Richtung der Kurve festlegten.

Diese Unbestimmtheit der Festlegung wächst, wenn wir weitergehen und von dem 3te, 4te ... Differenzenquo-

dienten reden wollen.

Bei der strengen Kurve müssen wir natürlich wieder, um die Analogie mit der empirischen Kurve aufrecht zu erhalten, die Existenz der zweiten und der höheren Differentialquotienten postulieren.

Die Punkte 4/ und 5/ zusammenfassend folgt also: Damit diejenigen Attribute, die wir einer empirisch gegebenen Kurve betreffend Richtung und Krümmung (erster und höherer Differentialquotienten) beilegen, bei einer scharf definierten Funktion sich in ringemäßer Weise wiederfinden, werden wir die Funktion nicht nur als stetig und mit einer endlichen Anzahl von Maximis und Minimis im endlichen Intervall behaftet voraussetzen, sondern ausdrücklich annehmen, daß sie einen ersten und eine Reihe höherer Differentialquotienten (soviel man gerade benutzen will) besitzt.[1]

[1] Man könnte natürlich an die Uebereinstimmung noch weitere Forderungen stellen. Bei einer empirischen Kurve ist dann die zu einem Punkte gehörige Richtung, Krümmung u. s. w. ein Stück der weiteren Verlaufs vorausbestimmt (was insofern selbstverständlich ist, als wir die zu einem Punkte gehörige Richtung, Krümmung u. s. w. erst aus diesem Verlauf festlegen). Otto Klopke aus Altona [den ich gelegentlich der Hamburger Naturforscherversammlung ausführlich sprach] hält es für zweckmäßig, auch diese Vorausbestimmung bei den in erster Linie zu betrachtenden Funktionen $y = f(x)$ als eine Forderung festzuhalten. Er kommt dadurch natürlich zu Funktionsklassen, die enger sind, als die im Texte betrachteten. Für

Für das unmittelbar Folgende ist unser Programm durch diese letzten Entwickelungen festgelegt. Wir haben die dort den Kurven beigelegten, aus der Erfahrung genommenen Attribute für die Funktionen $y = f(x)$ vom Standpunkte der Präzisionsmathematik streng zu definieren.

I. Zunächst die Definition der Stetigkeit.

Ich gebe hier historisch an, daß alle diese Definitionen in die Wissenschaft Eingang gefunden haben durch das fundamentale Werk:

A. Cauchy: Cours d'analyse T. 1, Paris 1821, (in das Cauchy (1789-1857) seine Vorträge an der École polytechnique hineingearbeitet hat.

Unabhängig von Cauchy ist in dieser Hinsicht einer derer Forscher tätig gewesen, dessen Name erst spät in die größere Öffentlichkeit gedrungen ist. Es ist dies Bolzano (1781-1848) in Prag (seit 1817), über dessen Bedeutung für die Geschichte der Differential- und Integralrechnung man die Arbeit von O. Stolz in den Math. Ann. 18 (1881).

O. Stolz: Bolzano's Bedeutung für die Infinitesimalrechnung

---

die so ausgesonderten Funktionen möchte Hr. Köpke einen höheren Grad von Anschaulichkeit in Anspruch nehmen als für die anderen. Ich mache demgegenüber natürlich geltend, daß nach meiner Auffassung überhaupt keine Funktionen anschaulich sind, sondern immer nur Funktionsbegriffen.

[Zusatz vom 3. Oktober 1901.]

vergleichen möge. Es ist hier wie so oft in der Wissenschaft ergangen. Die historische Entwickelung knüpft man an einen Namen an, während die Möglichkeit zu einer solchen Entwickelung an mehreren Stellen gleichzeitig gegeben war.

Wie lautet nun die Cauchy'sche Definition der Stetigkeit?

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt stetig in einem Intervall, wenn man um jede einzelne Stelle des Intervalls herum einen Bereich so abgrenzen kann, daß innerhalb desselben die Schwankung der Funktion kleiner ist, als eine noch so kleine vorgelegte Größe η. Oder in Formeln:

Ist ξ eine hinreichend kleine Größe und

$$|x' - x| < \xi, \text{ so ist } |f(x') - f(x)| < \eta,$$

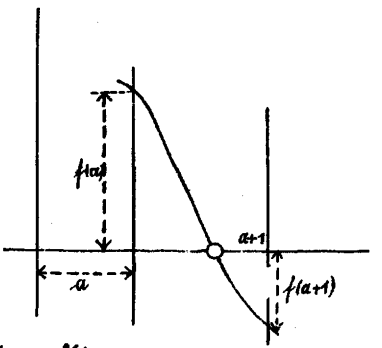
d. h. wenn eine noch so kleine Größe η gegeben ist, dann soll man immer eine Größe ξ so wählen können, daß für die Argumentendifferenz kleiner als ξ auch die Funktionsdifferenz kleiner als η ist.

Wir beweisen nun auf Grund dieser Definition, daß eine stetige Funktion in einem Intervall alle Zwischenwerte durchläuft.

Wir beweisen den Satz in einer speziellen Form, bei der aber das allgemeine Prinzip durchleuchtet.

Es möge $f(x)$ an zwei ganzzahligen Stellen $x = a$ und

$x = a + i$ betrachtet werden, dabei sei $f(a) > 0$ und $f(a) + 1 < 0$. Wir beweisen, daß dann $f(x)$ zwischen a und $a+1$ mindestens einmal durch 0 geht.



Empirisch ist ganz klar, daß eine Kurve, wenn sie bei a oberhalb und bei $a+1$ unterhalb der Abszissenachse verläuft, mindestens einmal die Achse schneidet. Theoretisch müssen wir aber beweisen, daß aus der von uns gewählten Definition der Stetigkeit auf Grund der ein für allemal festgelegten Zahlbegriffs das vorgelegte Theorem sich herleiten läßt. Anders ausgedrückt: Es handelt sich darum, die Zweckmäßigkeit der Cauchyschen Definition der Stetigkeit zu erproben, indem wir beweisen, daß aus ihr dasselbe Theorem folgt, welches mit der Kontinuität der empirischen Kurve (infolge unserer natürlichen Ideen über Kontinuität) unmittelbar gegeben ist.

Der zu beweisende Satz lautet also nochmals:
Eine Funktion, die im Sinne von Cauchy stetig ist und bei $x = a$ positiv, bei $x = a + 1$ negativ ist, besitzt zwischen a und $a+1$ mindestens einen Nullpunkt.

Der Beweis hat denselben Kunstcharakter wie unsere Beweise über die Punktmengen, er ist ein „Terminalbeweis"

Wir teilen das Intervall a bis a+1 in 10 Teile nach den einstelligen Dezimalbrüchen

$$a;0 \quad a;1 \quad a;2 \ldots\ldots a;9 \quad a+1;0.$$

Wenn dann nicht für einen der Teilpunkte $f(x)$ gleich Null ist (was wir ausschließen, da dann nichts mehr zu beweisen wäre), so gibt es ein erstes Intervall $a;b \ldots a;b+1$, an dessen linkem Endpunkt f noch positiv, an dessen rechtem Endpunkt f negativ ist, so daß für dieses Zehntelintervall eben dasjenige stattfindet, was für das ganzzahlige Intervall gilt.

Das Zehntelintervall $a;b \ldots a;b+1$ teilen wir jetzt in 10 Hundertelintervalle

$$a;b,0 \quad a;b,1 \quad a;b,2 \ldots a;b,9 \quad a;b+1,0,$$

(wo es wieder eintreten kann, daß f für einen der Teilpunkte verschwindet, was wir indes wieder ausschließen). Wir wählen wieder das erste dieser Intervalle, an dessen linkem Endpunkt f positiv, an dessen rechtem Endpunkt f negativ ist. Indem wir den Prozeß in der angegebenen Art fortsetzen, bekommen wir schließlich zwei Dezimalbrüche:

$$a;b,c,d,e,f \ldots.$$

$$a;b,c,d,e,f \ldots$$

die in immer mehr Dezimalen übereinstimmen, d.h. durch unbeschränkte Fortsetzung des Dezimalverfahrens

einen ganz bestimmten Grenzwert x_0.

Wir wollen nun zeigen, dass infolge der Cauchy'schen Definition der Stetigkeit f für diesen Grenzwert verschwindet, d.h. $f(x_0) = 0$ ist:

Dieser Satz lässt sich auf einen allgemeinen Grundsatz reduzieren.

x_0 ist der Limes einer fallenden und steigenden Reihe von Dezimalbrüchen; für die erstere ist f positiv, für die letztere negativ:

$x_0 = \lim a;\, o \mid a;\, b \mid a;\, b,\, c \mid \ldots$ mit $f > 0$

$x_0 = \lim a+1;\, o \mid a;\, b+1 \mid a,\, b,\, c+1 \mid \ldots$ mit $f < 0$

Es gilt nun für stetige Funktionen der Satz:

Wenn x_0 Limes einer Punktmenge x ist (eine Verdichtungsstelle der Punktmenge ist), dann ist auch der Funktionswert $f(x_0)$ der Limes derjenigen Funktionswerte $f(x)$, die den entsprechenden x_0 zugehören.

Es folgt dies einfach aus dem Wortlaut der Cauchy'schen Definition der Stetigkeit.

Hiermit ist nun unser obiger Satz unmittelbar bewiesen: denn einmal erscheint hiernach $f(x_0)$ als Limes einer Reihe nur positiver Grössen, das andere Mal als Limes einer Reihe nur negativer Grössen. Beide Behauptungen sind nur verträglich, wenn $f(x_0) = o$ ist. —

Bei dem Beweise haben wir zuletzt einen Satz benutzt, der fast wichtiger als der bewiesene Satz selbst ist. In Zeichen lautet er:

Ist $f(x)$ stetig, so ist

$$f(\lim x) = \lim f(x),$$ oder in Worten:

Strebt das x einer Grenze zu, so strebt das f der Grenze der zugehörigen Funktionswerte zu.

Wir können aus diesem Satz noch einen weiteren ableiten, der uns später nützlich ist:

Wir wählen als x zunächst die überall dicht liegenden rationalen Zahlen ($x = \frac{m}{n}$) der Abszissenachse. Durch sie können wir alle irrationalen Zahlen festlegen, nämlich als Limiten unendlicher Reihen von rationalen Zahlen. Es ist also für ein irrationales x_0

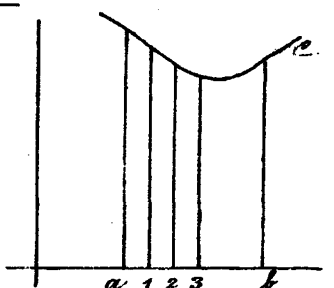
$f(x_0) = f(\lim \text{rat. } x) = \lim f(\text{rat. } x)$, in Worten:

Eine stetige Funktion ist in allen Punkten eines Intervalls definiert, wenn sie für alle Punkte einer das Intervall überall dicht erfüllenden Menge definiert ist, speziell also, wenn sie für alle rationalen Zahlen definiert ist.

Wir können aber als Menge beispielsweise auch die Gesamtheit der endlichen Dezimalbrüche wählen (da diese auch noch überall dicht liegen), so daß wir als Corollar haben:

Insbesondere ist eine stetige Funktion vollkommen definiert, wenn sie für alle diejenigen Zahlen x definiert ist, die sich als endliche Dezimalbrüche anschreiben lassen.

2) Wir kommen zu dem 2te Punkt, wo von der Umgrenzung eines Flächeninhalts die Rede war.



Wir haben das Gefühl, dass jede empirische Kurve einen Flächeninhalt umgrenzt.

Um diesen empirisch zu berechnen, kann man in roher Annäherung das Papier ausschneiden und wägen. Man findet durch diese Gewichtsmethode teilweise brauchbare Resultate.

Ein weiteres praktisches Verfahren gibt die sogenannte mechanische Quadratur, wohin die Trapez- und Simpson'sche Regel zu zählen sind. Um nur die Trapezformel zu geben, so teile man das Intervall durch die Teilpunkte 0, 1, 2 .. n in so kleine Stücke Δx (die zweckmässig gleich gross gewählt werden), dass das Kurvenstück zwischen den Ordinatenendpunkten der einzelnen Δx als annähernd geradlinig betrachtet werden kann. Durch Summation der Trapezinhalte findet man dann für den von der Kurve umspannten Flächeninhalt:

$$\Delta x \frac{y_0+y_1}{2} + \Delta x \frac{y_1+y_2}{2} + \ldots + \Delta x \frac{y_{n-1}+y_n}{2}$$
$$= \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

Ein drittes praktisches Verfahren operiert mit dem Planimeter.

Diese empirischen Integrationsmethoden sind in meiner Vorlesung über Integralrechnung (WS 1896/97)[1] um so eingehender behandelt, weil die meisten Lehrbücher hierüber mit Stillschweigen oder doch mit ungebührlicher Kürze hinweggehen; vergl. die auf dem Lesezimmer aufgestellte Ausarbeitung[1]. Im Seminar behandelten wir neuerdings die Fehlertheorie des Amsler'schen Polarplanimeters. Eine Hauptfehlerquelle für die praktische Bestimmung des Flächeninhalts ist übrigens nicht sowohl die Willkür in der Wahl der Grösse Δx, als vor allem die Breite der gezeichneten oder sonst empirisch gegebenen Kurve, die den Flächeninhalt abgrenzt. So ist z. B. bei einer Länge von 10 cm und einer Breite $\frac{1}{3}$ m/m des Streifens der aus letzterer entstehende Fehler $\frac{1}{3}$ cm².

Wie werden wir nun theoretisch diese Dinge fassen?

Die theoretische Betrachtung beginnt mit der Summe $\sum_{\mu} \Delta x f_\mu(x)$, wo $f_\mu(x)$ nicht gerade die Mittelordinate, sondern irgend eine Ordinate in dem Intervall

[1] Nicht autographiert.

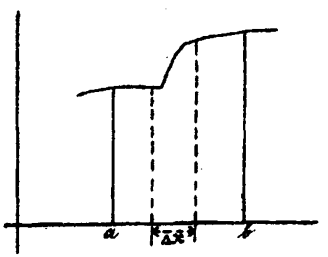
Δx sein kann, und untersucht, ob für ein gegebenes $f(x)$ ein Limes existiert, wenn die Δx unbegrenzt kleiner (und natürlich gleichzeitig immer zahlreicher) werden. Wir bezeichnen den Limes mit $\int_a^b f(x) \cdot dx$ und nennen ihn das bestimmte Integral von $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b. Die Frage, die wir im folgenden zu entscheiden haben, ist:

Existiert und wann existiert ein solcher Limes d.h. wann ist die Funktion $f(x)$ integrierbar?

Der erste, der diese Frage aufgeworfen und im allgemeinem Sinn behandelt hat, ist B. Riemann in seiner Habilitationsschrift 1854:

B. Riemann: Über die Darstellbarkeit einer willkürlichen Funktion durch eine trigonometrische Reihe.

Wir beginnen damit, daß wir eine endliche Funktion, die nicht stetig zu sein braucht, in dem Intervalle a bis b betrachten und für ein Intervall Δx je die größte Ordinate $f_{max}(x)$ und die kleinste Ordinate $f_{min}(x)$ besonders herausheben. Dann wird unser Wert $f_\mu(x)$ irgend ein Wert zwischen diesen beiden sein, also:



Unsere ursprüngliche Summe $\Sigma \Delta x \cdot f_\mu(x)$ liegt zwischen zwei Grenzen $\Sigma \Delta x \cdot f_{max}(x)$ und $\Sigma \Delta x \cdot f_{min}(x)$, und

diese beiden Grenzen unterscheiden sich um die Differenz $\Sigma \Delta x D f(x)$, wo $D f(x)$ die „Schwankung" ist, die die Funktion im Intervalle Δx erleidet.

Wenn wir nun zeigen können, dass $\Sigma \Delta x . D f(x)$ durch hinreichend kleine Wahl der Teilchen Δx beliebig klein gemacht werden kann, dann nennen wir die Funktion integrierbar.

Wir nehmen nunmehr speziell die Funktion stetig an und behaupten:

Ist $f(x)$ eine stetige Funktion, so kann man auf alle Fälle die Summe $\Sigma \Delta x . D f(x)$ beliebig klein machen d.h. also: jede stetige Funktion ist integrierbar.

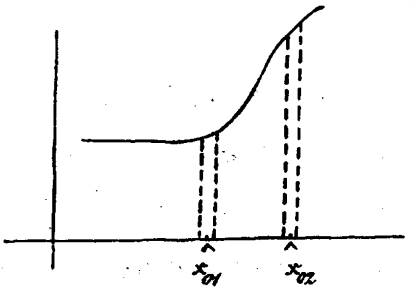
Bevor ich den Beweis geben kann, muss ich noch einen feinen Punkt über Stetigkeit erwähnen, den ich aber nicht ganz ausführen werde:

Wir hatten eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig genannt, wenn es ein ξ_0 gibt, so dass für

$$|x - x_0| < \xi_0 \qquad |f(x) - f(x_0)| < \eta$$

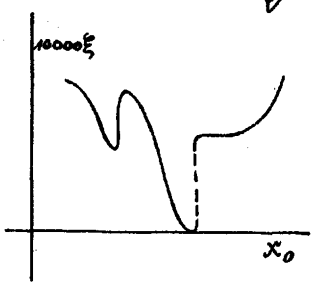
folgt, unter η eine beliebig kleine vorgegebene Grösse verstanden.

Wie ändert sich nun die Stetigkeit, wenn x_0 durch das Intervall $\overline{ab}$ hinwandert d.h. was ist das Maass der Stetigkeit, wenn x_0 das Intervall durchläuft?



Wir kommen zu dieser Frage, stellung, wenn wir eine Kurve betrachten, die einmal flach, das andere Mal steil ansteigt. Offenbar kann ich an der Stelle x_{01} für dasselbe η ein grösseres ξ_0 angeben, als an der Stelle x_{02}, so dass also ξ_0 bei gegebenem η für verschiedene Stellen x_0 äusserst verschieden sein kann (je nachdem die Kurve mehr flach oder steiler verläuft).

Wir können uns hier durch eine Hilfskurve, die uns eine Beurteilung über das Maass der Stetig. keit gestattet, klarer machen.

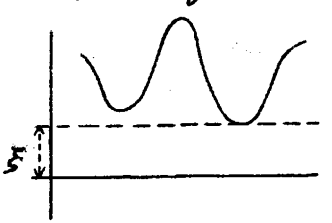


Wir wählen x_0 als Abzisse und $10000\,\xi_0$ etwa als Ordinate. Die entstehende Kurve (die uns für gegebenen η die Abhängigkeit der ξ_0 von x_0 gibt) wird im ganzen Intervalle positive Ordinaten haben. Damit ist aber noch nicht ausgeschlossen, dass die Hilfskurve in der in der Figur angedeuteten Weise verläuft, dass nämlich die Ordinaten an einer oder mehreren Stellen der Null beliebig nahe kommen, um an der Stelle wo sie nach der Kontinuität Null werden sollte, plötzlich in die Höhe zu springen, womit der Forderung, dass die Funk-

tion überall positive Werte haben soll, in der Tat genügt ist. Die Hülfskurve würde also eine Unstetigkeit darbieten. Tritt ein solches Verhalten ein, so nennen wir die Ausgangsfunktion „ungleichmässig stetig" in dem Intervall. Wir werden sagen:

Durch die Annahme, dass eine Funktion in einem jeden einzelnen Punkte des Intervalls stetig ist, ist zunächst noch nicht ausgeschlossen, dass die Stetigkeit über das Intervall hin ungleichmässig ist, d. h. dass es Stellen gibt, wo das ξ_0 kleiner wird als eine noch so kleine vorgegebene Grösse.

Wir haben dagegen eine gleichmässige Stetigkeit in dem Intervall, wenn die ξ - Kurve wohl auf- und abschwankt, doch jener Ausnahmefall nicht eintritt, d. h. wenn wir bei vorgegebenem η eine Grösse ξ derartig angeben können, dass für alle Punkte x_0 des Intervalls gleichzeitig, sobald nur $|x - x_0| < \xi$ ist, auch $|f(x) - f(x_0)| < \eta$ ist.



Jetzt kommt der Punkt, dessen Beweis ich der Kürze halber übergehe. Man zeigt, dass die schlimme Eventualität der ungleichmässigen Stetigkeit, an die wir beiläufig dachten, in Anbetracht unserer Definition der Stetigkeit von vornherein in Wegfall kommt.

Es gilt also der Satz:

Jede Funktion, die in allen Punkten einer Intervalls stetig ist, ist in dem gegebenen Intervall auch gleichmässig stetig.

Wegen des Näheren verweise ich auf meine Vorlesung über Funktionentheorie*) (W. S. 1898/99) oder auf

J. Tannery: Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable, Paris 1886

u. A. Pringsheim: Allgemeine Funktionentheorie Encyclopädie der math. Wissenschaften Bd 2 p 18**)

Ich habe hier auf die Möglichkeit einer ungleichmässigen Stetigkeit deshalb so ausführlich aufmerksam gemacht, weil wir später bei Fragen der Reihenkonvergenz mit analogen Möglichkeiten zu rechnen haben werden.

Nunmehr nehme ich die Frage der Integrierbarkeit der stetigen Funktionen wieder auf.

Da wir wissen, dass $f(x)$ gleichmässig stetig im Intervall $\bar{ab}$ ist, können wir ein ξ so finden, dass für dasselbe im ganzen Intervall, wenn nur $|x - x_0| < \xi$ ist, $|f(x) - f(x_0)| < \eta$ wird. Wählen wir also

* nicht autographiert.

**) Vgl. für die sämtlichen hier in Betracht kommenden Entwickelungen auch

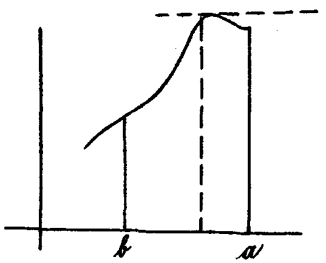
Harkness u. Morley: A treatise of the theory of analytic functions, London 1893, sowie die Introduction derselben Verfasser, London 1898.

$\Delta x < \xi$, so wird die Schwankung in dem Intervall Δx $|f(x) - f(x_0)| < \eta$ oder $\mathfrak{D} f(x) < \eta$. Für die Summe der mit Δx multiplizierten Schwankungen folgt jetzt:

$$\sum_a^b \Delta x \cdot \mathfrak{D} f(x) < \eta \sum_a^b \Delta x < \eta (a-b) \text{ d. h.}$$

Für eine stetige Funktion $f(x)$ können wir die Summe $\Sigma \Delta x \mathfrak{D} f(x)$ kleiner machen als $\eta(a-b)$ und damit kleiner als jede vorgegebene Zahl; es ist also eine stetige Funktion stets integrierbar.

3) Wir betrachten unter Punkt 3) die Lehre von den Maximis und Minimis.



Die Ordinate einer empirischen Kurve hat in einem Intervall allemal mindestens ein Maximum oder Minimum (das eventuell an den Endpunkten des Intervalls zu suchen ist.) Die Frage ist:

Hat eine idealisierte Kurve d. h. eine Funktion $y = f(x)$ (die natürlich im Intervall endlich bleiben soll) im Sinne der Präzisionsmathematik in dem Intervall $b \ldots a$ ein Maximum?

Wir müssen hier zunächst zwischen oberer Grenze und Maximum unterscheiden. Für ersteres gilt der Satz:

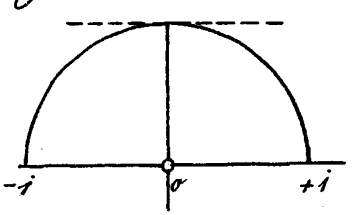
Ist $f(x)$ eine im Intervall $b \ldots a$ endliche

Funktion, dann gibt es für die y-Werte des Inter-
valls stets eine obere Grenze d.h. einen Wert M,
dem man beliebig nahe kommt, ohne ihn je zu
überschreiten.

Der Beweis folgt einfach aus unserm ersten Satz
über Punktmengen pg. 25. In der Tat: Zu jedem x
unsers Intervalls gehört ein bestimmter y, so daß wir
dem Intervalle der x-Achse entsprechend auf der y-
Achse eine wohldefinierte Punktmenge erhalten, die
nicht ins Unendliche geht. Für eine solche Punktmen-
ge aber haben wir die Existenz des oberen Grenzpunk-
tes bewiesen.

Unbekannt bleibt aber zunächst noch, ob dieser
obere Grenzwert der Punktmenge angehört, ob er also
zu einem bestimmten x als Ordinate zugehört oder
nicht, ob also die obere Grenze erreicht wird oder
nicht.

Ich will zunächst ein Beispiel geben, wo dies nicht
der Fall ist. $f(x)$ sei definiert
für alle Punkte zwischen $+1$
und -1 durch die Punkte ei-
nes Halbkreises, dessen Mittel-



punkt in 0 liegt und dessen Radius 1 ist, nur
für den Wert $x = 0$ sei $f(x) = 0$. also:

$|x| \geq 0 \qquad y = \sqrt{1-x^2}$

$|x| = 0 \qquad y = 0$, wie dies durch die Figur auf pg. 73 angedeutet ist. Dies ist eine wohl definierte, allerdings unstetige Funktion. Die obere Grenze ist 1, welche aber nicht erreicht wird, da für $x = 0$, wo sie erreicht würde, nach Definition $f(0) = 0$ ist.

Im Gegensatz hierzu erreicht jede stetige Funktion in jedem Intervall ihre obere Grenze d.h. eine stetige Funktion hat in jedem Intervall ein Maximum.

K. Weierstraß hob diesen Satz in seinen Vorlesungen stets besonders hervor, indem er aber den Gegensatz zwischen Präzisionsmathematik und Approximationsmathematik nicht besonders betonte, trat der Satz bei ihm für den Anfänger unvermittelt auf, sodaß sein gedanklicher Inhalt und die Notwendigkeit eines Beweises für Manchen nicht recht verständlich wurde.

Wir geben hier wieder einen sog. Dezimalbeweis d.h. wir definieren durch wiederholte Zehnteilung des Intervalls

$a \ldots\ldots a+1;\ 0$

$a;\ b \ldots\ldots a;\ b+1$

$a;\ b,\ c \ldots\ldots a;\ b,\ c+1$

eine Stelle x_0 derart, daß für ein beliebig kleines Teilintervall um x_0 herum M die obere Grenze ist. So weit ist der Schluß für jede Funktion f zu machen, daß aber dann $f(x_0) = M$ ist, gilt nur für stetige Funktionen. Letzteres wollen wir jetzt noch ausdrücklich zeigen.

Wir tun dies auf indirektem Wege, indem wir annehmen, daß $f(x) = M'$ sei, wo M' um einen endlichen Betrag kleiner als M ist. Aus der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ folgt, daß wir um x_0 ein Intervall so abgrenzen können, daß die Schwankung

$$|f(x) - f(x_0)| \leqq \eta \text{ ist, wo}$$

wir η ausdrücklich kleiner als $M - M'$ wählen wollen. Es liegen also die Funktionswerte zwischen $M' - \eta$ und $M' + \eta$. Da aber $M' + \eta$ immer noch kleiner als M ist, so folgt, daß M für unser Intervall nicht obere Grenze ist, was wir aber doch wegen der Definition der Stelle x_0 annehmen müssen. Der Widerspruch läßt sich also folgendermaßen formulieren.

Wäre $f(x_0) = M' < M$, so würde man in Folge der Stetigkeit von $f(x)$ um x_0 ein Intervall abgrenzen können, daß sämtliche Funktionswerte um ein endliches Stück kleiner als M sind, was mit

der Annahme M sei die obere Grenze für jeder den Punkt x_0 umgebende Intervall unvereinbar ist. –

Fassen wir zusammen, so sehen wir, dass die Kontinuität, die wir bei der empirischen Kurve voraussetzen, bei den obigen Funktionen der Präzisionsmathematik sich wiederfindet und dass auch die Attribute: Umgrenzung eines Flächeninhalts und Existenz der Maxima und Minima bei diesen statt haben. Wir werden im Interesse der Uebereinstimmung mit den empirischen Funktionen jetzt noch ausdrücklich voraussetzen, dass es bei unserm $f(x)$ nur eine endliche Zahl von Maximis und Minimis im endlichen Intervall gibt.

4) Wie steht es aber mit der Existenz des Differentialquotienten bei unserm $f(x)$?

Wir sagen zunächst: Bei der empirischen Kurve sahen wir die Richtung durch den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Δx von bestimmter Grössenordnung) definiert an. Bei der genauen Funktion $y = f(x)$ der Präzisionsmathematik definierten wir den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ als

$$\mathrm{Lim}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x = 0},$$ also:

In der Präzisionsmathematik ist der Differentialquotient nicht ein Quotient, sondern der Li-

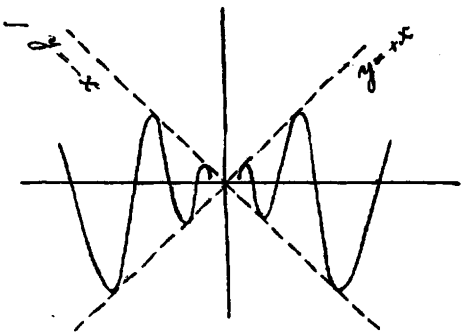
mes einer Quotienten. Die Frage ist:
Existiert ein solcher Limes?

Ich weise vorläufig auf folgenden Unterschied hin, der sich durch die ganze Litteratur hindurch zieht:

a/ Es wird das eine Mal mehr Gewicht darauf gelegt, dass der Differentialquotient, der Limes eines Quotienten ist, d. h. man behält die Assoziationen, die wir bei der empirischen Kurve haben, auch bei $\frac{dz}{dx}$ bei, legt also mehr Gewicht auf die Analogie mit der empirischen Kurve, als auf den hinzutretenden Grenzübergang. Dieser Standpunkt ist weniger exakt, aber nach vielen Richtungen anregend.

b/ Das andere Mal streift man alles ab, was an einen Quotienten erinnern könnte, und schreibt daher auch nicht $\frac{dy}{dx}$, sondern etwa J_x und sagt „Derivierte" oder „Ableitung" von $f(x)$ nach x. Hier wird also das Hauptgewicht auf das Wort Limes gelegt. Dieses Verfahren ist weniger anregend, aber besonders exakt. –

Damit ich völlige Klarheit inbetreff der vorgelegten Frage nach der Existenz eines Limes von $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ (für $\Delta x = 0$) für stetige Funktionen erziele, beginne ich mit einem Beispiele.



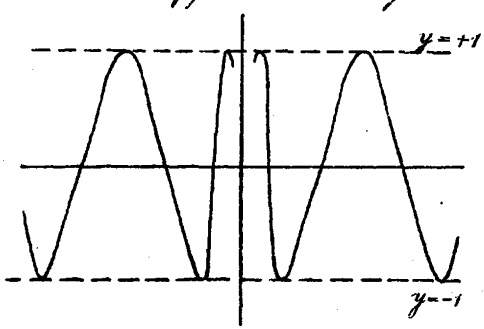
Wir wählen die bereits oben herangezogene Funktion

$$y = x \cdot \sin 1/x .$$

Sie läuft von rechts wie links mit immer gehäuften Schwingungen zwischen den Ordinaten $y = +x$ und $y = -x$ auf den Nullpunkt zu, in welchem selbst sie übrigens durchaus stetig ist. (Man vergleiche den Wortlaut der Cauchy'schen Definition). Wir bilden uns für den Koordinatenanfangspunkt den Differenzenquotienten. Er wird offenbar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{x} = \sin 1/x$$

Was werden wir nun von dem Differentialquotienten sagen können?



$\sin 1/x$ ist eine Funktion, die für unbeschränkt kleiner werdender x unendlich oft zwischen $+1$ und -1 auf- und abschwankt. Also:

Der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ schwankt, wenn Δx gegen Null geht, fortgesetzt zwischen $+1$ und -1 hin und her, ohne sich einer festen Grenze zu nähern. Dabei sind $+1$ und -1 in der Wertemenge, welche der Differenzenquotient annimmt, wenn Δx bis zur Null abnimmt, die obere und untere Grenze, wie

klein man auch das Intervall nehmen mag, in welchem sich Δx bewegt. (Daß diese obere und untere Grenze im Intervall immer wieder wirklich angenommen wird, wollen wir nicht besonders betonen).

Bei unserer Betrachtung dachten wir uns soweit Δx positiv. Das Resultat ändert sich aber ersichtlich nicht, wenn wir Δx nach der negativen Seite wählen.

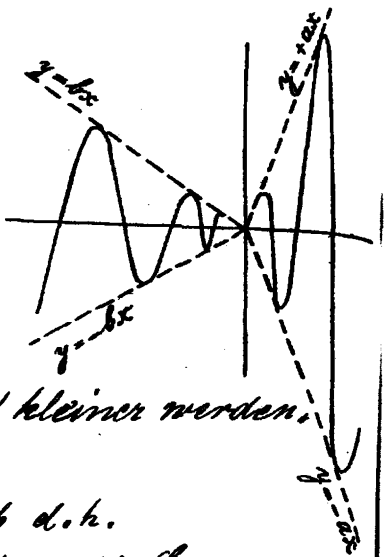
Bezeichnen wir für positives Δx die obere Grenze der Werte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bei unbegrenzt abnehmendem Δx mit D^+, die untere mit D_+, für negatives Δx die obere Grenze mit D^-, die untere entsprechend mit D_-, so ist unser Resultat in Formeln geschrieben:

$$D^+ = +1 \quad D_+ = -1, \quad D^- = +1 \quad D_- = -1$$

Derartige 4 Grenzwerte können wir nun an jeder Stelle einer stetigen Funktion bilden, wie wir weiterhin noch zu erörtern haben.

Wir ändern unser Beispiel vorab noch ein wenig ab, sodaß die Funktion rechts und links von der y-Achse nicht mehr symmetrisch ist. Wir schreiben

$$y = ax \cdot \sin 1/x \text{ rechts}$$
$$y = bx \cdot \sin 1/x \text{ links}$$



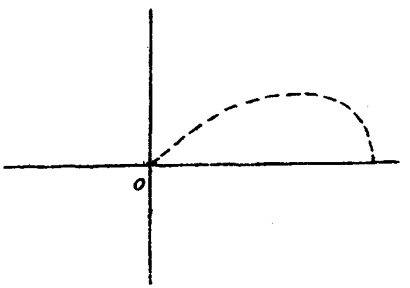
d. h. die Kurve schwankt rechts zwischen +ax und - ax, links zwischen +bx und - bx und ist im Nullpunkt stetig.

Unsere 4 Grenzwerte des Differenzenquotienten für unbeschränkt kleiner werden. des Δx sind dann

$$D^+ = a \quad D_+ = -a, \quad D^- = b \quad D_- = -b \text{ d.h.}$$

Wir haben hier ein <u>Beispiel, bei dem die Grenzen rechts und links verschieden sind.</u>

Wir gehen in der Verallgemeinerung noch einen Schritt weiter. Unser Beispiel ist nämlich noch darin partikulär, dass der Differenzenquotient (wie wir schon beiläufig hervorhoben) die beiden Grenzen, auf welche er sich hinbewegt, wenn $\Delta x = 0$ wird, schon vorher unendlich oft annimmt. Man kann aber sehr leicht Beispiele bilden, wo dies nicht der Fall ist.



Es sei $y = y_1 \cdot \sin 1/x$, wo y_1 die Ordinate einer Kurve ist, welche nach Art der nebenstehend gezeichneten unter 45° durch den Nullpunkt geht.

Hier schwankt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nicht zwischen +1 und - 1,

wird aber diesen Grenzen immer näher kommen, sowie Δx sich dem Nullpunkt nähert.

Wollen wir für y_1 eine gesetzmässige Kurve, etwa eine Lemniscate wählen (um eine geschlossene analytische Formel zu haben), so sind y_1 und x durch die Gleichung

$(x^2+y_1^2)^2 = x^2 - y_1^2$ an einander gebunden, d. h.

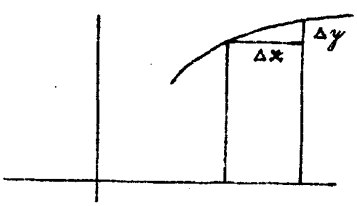
$y_1 = + \sqrt{+\frac{\sqrt{8x^2+1}-(2x^2+1)}{2}}$ für das gezeichnete Kurvenstück im ersten Quadranten.

Mithin lautet unsere Funktion

$y = \sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1}-(2x^2+1)}{2}} \cdot \sin 1/x$.

Hier schwankt also $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zwischen $+1$ und -1, wenn Δx gegen Null geht, aber diese Werte selbst werden nicht mehr angenommen.

Durch diese Beispiele dürfte nun folgendes klar sein:



Es sei irgend eine stetige Funktion $y = f(x)$ gegeben. Wir markieren diese Punkte x und y und konstruieren nach rechts Δx und das zugehörige Δy, dann gibt es jedenfalls 2 Grenzwerte, zwischen denen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bei unbeschränkt kleiner werdendem Δx sich hin-

und herbeiregt. D^+ und D_+. Ebenso werden, wenn Δx von links gegen Null geht, die Werte von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, je kleiner Δx wird, zwischen 2 bestimmten Grenzen D^- und D_- enthalten sein. Also:

Wie immer die stetige Funktion $f(x)$ gestaltet sein mag, wenn Δx gegen Null geht, so wird der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zwischen 4 Grenzwerten eingeschlossen sein, von der einen Seite zwischen D^+ und D_+, von der andern zwischen D^- und D_-.

Wenn $D^+ = D_+$, so werden wir sagen, daß die Funktion nach rechts einen „Differentialquotienten" besitzt, ist $D^- = D_-$, so hat sie einen linksseitigen Differentialquotienten.

Wir werden aber dann, und nur dann, schlechtweg von einem bestimmten Differentialquotienten einer Funktion an einer Stelle reden, wenn sämtliche 4 Grenzwerte gleich sind.

Wenn man sich in dieser Weise klar macht, wieviel Bedingungen zu erfüllen sind, damit eine Funktion in jedem Punkte einen Differentialquotienten hat, so muß man sich wundern, daß es überhaupt solche Funktionen gibt. Dieses Stadium der Verwunderung ist das andere Extrem, dessen Segen glücklich durch die gedankenlose Gewöhnung gebei-

der wird, demzufolge jede stetige Funktion einen Differentialquotienten besitzen soll.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen und zur völligen Einübung derselben beschäftigen wir uns nunmehr ausführlich mit einem Beispiele einer stetigen Funktion, die an keiner Stelle einen Differentialquotienten in dem von uns berechneten Sinne hat.

Wir wählen die bekannte Weierstraß'sche Funktion, die derselbe um 1861 auffand, die aber erst 1874 in einem Aufsatze von P. du Bois-Reymond publiziert wurde (J. f. Math. 79 (1875)). Was die allgemeine Litteratur des in Rede stehenden Gegenstandes angeht, so verweise ich auf:

A. Voss: Differential- und Integralrechnung, Encyklopädie d. math. Wissenschaften Bd. 2 pg. 63, 64,

E. Pascal: Esercizii di calcolo infinitesimale, Milano 1895, pg 85–128,

wo sämtliche damals bekannten Entwickelungen zusammengestellt sind (Angabe der Litteratur); ferner aber auf die neueren Publikationen:

J. Broden: Beiträge zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen Journ. f. Math. 118 (1897), pg. 1–60.

L. Steinitz: Stetigkeit und Differentialquotient, Math. Ann. 52 (1899), pg.

E. H. Hosse: On certain crinkly curves, American Math. Soc. Transactions 1, (1900)

Die Weierstrass'sche Funktion ist durch eine unendliche trigonometrische Reihe von der Form

$$y = \sum_0^\infty b^n \cos(a^n x \pi)$$

gegeben, wo $b > 0$, aber < 1 (wegen der Konvergenz der Reihe) und a eine ungerade Zahl ist.

Wir wollen uns zunächst an einem Zahlenbeispiel den Aufbau der Funktion klar machen. Es sei $b = 1/2$, $a = 5$; also

$$y = \cos x\pi + 1/2 \cos 5x\pi + 1/4 \cos 25x\pi + 1/8 \cos 125x\pi + \ldots$$

Wir betrachten zuerst die Teilkurven:

$$y_0 = \cos x\pi$$
$$y_1 = 1/2 \cos 5x\pi$$
$$y_2 = 1/4 \cos 25x\pi$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

aus deren durch Ueberlagerung die Kurve y hervorgeht.

$y_0 = \cos x\pi$ ist eine gewöhnliche Cosinuslinie, deren erster Nullpunkt bei $x = 1/2$ liegt und die die halbe Wellenlänge 1 hat.

$y_1 = 1/2 \cos 5x\pi$ gibt eine Wellenlinie, deren Höhe zwischen $+1/2$ und $-1/2$ schwankt, deren erster Nullpunkt bei $x = 1/10$ liegt und deren halbe Wellenlänge $1/5$ beträgt. Die Wellenlinie y_1 verläuft daher steiler als y_0.

$y_2 = 1/4 \cos 25x\pi$ ist eine Wellenlinie, die abermals

steiler als die vorhergehende verläuft. Der erste Null„punkt liegt bei $x = 1/50$, die halbe Wellenlänge beträgt $1/25$, die Ordinaten schwanken zwischen $+ 1/2$ und $- 1/2$.

Die folgenden Teilkurven verlaufen entsprechend mit immer gesteigerter Steilheit und geringerer Höhe, so daß wir als springenden Punkt, wodurch auch später der Erfolg wesentlich bedingt ist, notieren:

Die successiven Teilkurven, welche überlagert die Endkurve ergeben, stellen Wellenlinien vor von zwar abnehmender Amplitude, aber immer zunehmender Steilheit.

Wir verlassen nun das Zahlenbeispiel und gehen zu der ursprünglich gegebenen Funktion

$$y = \sum_0^\infty b^\nu \cos a^\nu x\pi$$

zurück. Bei ihr unterscheiden wir dem Früheren analog:

1) Teilkurven $y_0 = b^\nu \cos a^\nu x\pi$

2) Näherungskurven $y_m = \sum_0^m b^\nu \cos a^\nu x\pi$

d.h. die Summe von $m+1$ Teilkurven

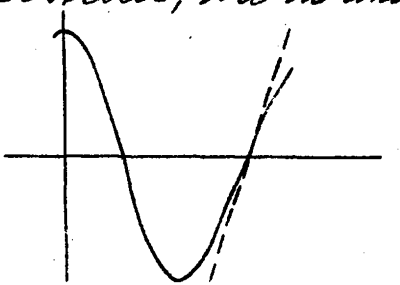
3) die Endkurve $y = \sum_0^\infty b^\nu \cos a^\nu x\pi$.

In Bezug auf die Teilkurven haben wir für $a > 1$, $b < 1$ jedenfalls den Satz:

Mit wachsendem ν werden die Teilkurven im „

mer niedriger und schmaler.

Werden sie aber auch immer steiler, wie in unserem Zahlenbeispiel?



Wir messen die Steilheit der Kurve durch den Differentialquotienten in einem Knoten d. h. in einem Punkte wo die Kurve die x-Achse durchsetzt, in dem cos $a^r x\pi$ verschwindet.

$\frac{dy_0}{dx}$ wird gleich $-a^r b^r \pi \sin a^r x\pi$; für einen Knotenpunkt wird hiernach

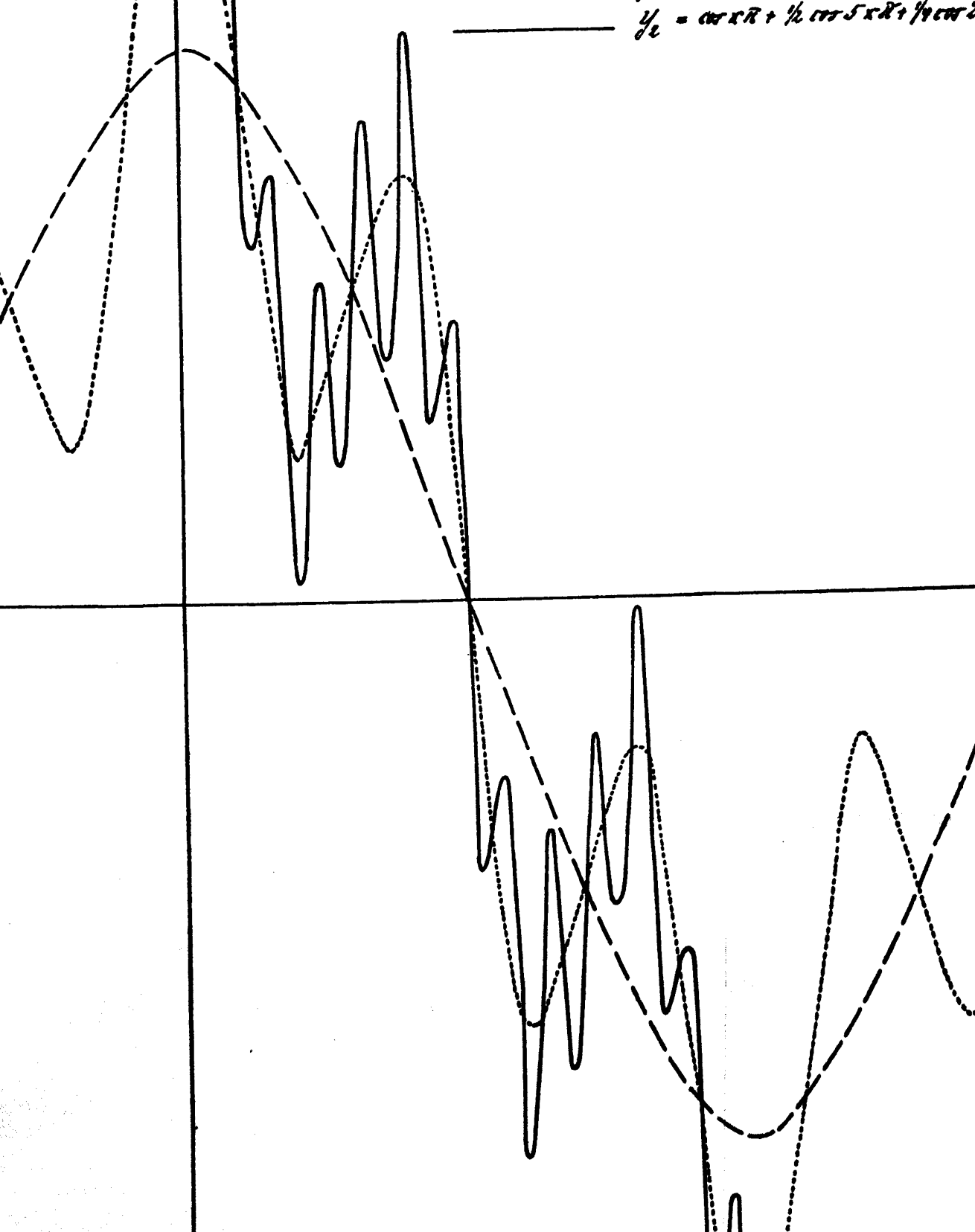
$$\left|\frac{dy_r}{dx}\right| = (ab)^r \pi .$$

Sobald also $a.b > 1$ ist, werden die aufeinander folgenden Teilkurven, trotzdem sie an Höhe mit wachsendem r abnehmen, mit wachsendem r steiler und steiler.

Wir sagen nunmehr etwas <u>über die Näherungskurven</u>. Haben wir uns erst klar gemacht, wie eine solche Näherungskurve aus der nächst vorangehenden entsteht, so werden wir durch die Forderung der unbeschränkten Fortsetzung des Prozesses in der Lage sein, uns ein gewisses Bild von der Endkurve zu machen.

Es ist

$$y_1 = \cos x\pi + b \cos ax\pi \quad \text{d. h. also:}$$


$y_2 = \cos x\pi + \frac{1}{2}\cos 5x\pi + \frac{1}{4}\cos$

Die Näherungskurve y_1 hat man sich in der Weise zu denken, daß man über die gemeine Cosinuslinie eine feinere Wellenlinie überlagert.

Bilden wir y_2, so ist

$$y_2 = \cos x\pi + b\cos ax\pi + b^2\cos a^2x\pi \text{ d. h.}$$

hier tritt zu der vorigen noch eine feinere Wellenlinie (schmaler und steiler) hinzu.

Ist hiermit der organische Aufbau der Näherungskurven gegeben [1], so erlahmt doch unsere Vorstellungskraft rasch, wenn wir die entstehende Kurve als Ganzes überblicken wollen; wir müssen uns vielmehr sehr bald mit der logischen Definition genug sein lassen, die ich so formuliere:

Jede folgende Näherungskurve ergiebt sich aus der vorangehenden, indem sich eine neue feinere Welle von kleinerer Amplitude, aber noch kleinerer Wellenlänge über die bereits konstruierte Kurve hinüberlagert.

Was können wir nun über die Endkurve aussagen?

Wir denken uns die m^t Näherungskurve konstruiert und schreiben daher

---

[1] Vergl. die ausgeführte Figur neben pg 85; hier ist wieder $b = \frac{1}{2}$, $a = 5$ genommen. Ich schließe mich mit dieser Zeichnung und den folgenden Betrachtungen an die Entwickelungen von Hr. Wiener im Journ. f. Math. 90 (1881) an, ohne

$$y = \sum_0^\infty b^\nu \cos a^\nu x\pi = y_m + \sum_{m+1}^\infty b^n \cos a^n x\pi.$$

Die einzelnen Summanden in der Summe haben alle denselben Faktor b^{m+1}. Indem wir ihn herausziehen, folgt:

$$y = y_m + b^{m+1} \sum_0^\infty b^s \cos a^{m+1+s} x\pi.$$

Wir schätzen nun die unendliche Summe ab d. h. wir geben eine obere und untere Grenze für die Summe und damit einen Streifen an, in dem die Kurve liegt.

Die obere Grenze erhalten wir, wenn wir die Cosinus sämtlich $+1$, die untere Grenze, wenn wir sie sämtlich gleich -1 setzen. Also

$$y = y_m + b^{m+1} \begin{cases} 1 + b + b^2 + \dots & \text{obere Grenze} \\ -1 - b - b^2 - \dots & \text{untere } \text{“} \end{cases}$$

In der Klammer steht eine geometrische Reihe, die konvergiert, da wir b ausdrücklich kleiner als 1 voraussetzten. Somit ist das Resultat

$$y = y_m + \varepsilon b^{m+1} \cdot \frac{1}{1-b}, \text{ wo } \varepsilon \text{ ein unbekannter Faktor zwischen } +1 \text{ und } -1 \text{ ist, die Grenzen eventuell eingeschlossen. In Worten:}$$

Die Ordinate der Endkurve ergibt sich aus der Ordinate y_m der m^{te} Näherungskurve, in dem

---

indessen seine (unrichtige) Kritik der Weierstraß'schen Behauptungen aufrechnehmen.

man einen Betrag addiert, der die Gestalt $\varepsilon \frac{6^{m+1}}{1-6}$ hat, wo ε in den angegebenen Grenzen liegt.

Mehr geometrisch können wir auch sagen: Unsere Endkurve ist eingeschlossen in einem Streifen von der Dicke $2\frac{6^{m+1}}{1-6}$, dessen Mittellinie die m^{te} Näherungskurve ist.

Ist z.B. $b = 1/10$ und messen wir in Centimetern, so wird für $m = 6$ $2\frac{6^{m+1}}{1-6} = 2\frac{(1/10)^7}{9/10} = 2(9/10)^6$ d.h. eine Breite, die unter das hinabsinkt, was je mit dem schärfsten Mikroskope wahrzunehmen ist. Ist also b einigermassen klein, so sinkt die Breite des Streifens ausserordentlich rasch herab.

Jedenfalls folgt aber aus diesem Satze die Stetigkeit der Funktion y und zwar folgendermassen:

y_m ist stetig als endliche Summe stetiger Funktionen. Was noch hinzugefügt wird, damit wir die Endkurve erhalten, kann mit wachsendem m beliebig klein gemacht werden. Beides zusammengenommen heisst aber nichts anderes, als dass y stetig ist. Wir wollen hier für noch kurz die Formeln geben:

Sei $y(x) = y_m + \varepsilon \frac{6^{m+1}}{1-6}$,

$y(x') = y'_m + \varepsilon' \frac{6^{m+1}}{1-6}$,

so ist $|y(x)-y(x')| = \left|y_m - y'_m + (\varepsilon-\varepsilon')\frac{b^{m+1}}{1-b}\right|$,

$|y(x)-y(x')| < \underbrace{|y_m - y'_m|}_{\eta_1} + \underbrace{\left|(\varepsilon-\varepsilon')\frac{b^{m+1}}{1-b}\right|}_{\eta_2}$

und also

$|y(x)-y(x')| < \eta_1 + \eta_2 < \eta$. In Worten:
Wir nehmen erstlich m so gross, dass $(\varepsilon-\varepsilon')\cdot\frac{b^{m+1}}{1-b} < \eta_2$, dann nehmen wir x' so nahe an x, dass $y_m - y'_m < \eta_1$ ist; so wird
$y - y' < \eta_1 + \eta_2$, d. h. kleiner als irgend ein vorgegebenes η. Wir rekapitulieren:
Da die Breite des Streifens mit wachsendem m beliebig klein gemacht werden kann und anderseits die Näherungskurve y_m eine stetige Funktion ist, ist auch die Endkurve stetig.
Wir können aber noch mehr über die Endkurve aussagen. Es ist uns möglich bestimmte Punkte, die ich Knoten und Scheitel nennen will, von vornherein in geschlossener Form anzugeben.

Zunächst die Knoten:
Der Cosinus eines Winkels ist null, wenn das Argument ein ungerades Vielfache von $\pi/2$ ist. Wir setzen nun $x = \frac{2g+1}{2a^m}$, wo g eine ganze Zahl ist. Dann ist $a^m x \cdot \pi = (2g+1)\,\pi/2$,

$\cos a^m x\pi = \cos(2g+1)\,\pi/2 = 0$, aber auch

$\cos a^{m+1} x\pi = \cos a^{m+2} x\pi = \ldots = 0$, da wir a als ungerade Zahl voraussetzten, und jede ungerade Zahl mit einer andern ungeraden Zahl multipliziert wieder eine ungerade Zahl gibt [1].

Ist also $x = \frac{2g+1}{2a^m}$, wo g eine ganze Zahl ist, so hat an dieser Stelle nicht nur die m^{te} Teilkurve einen Knotenpunkt, sondern auch jede folgende Teilkurve und die Endkurve stimmt an dieser Stelle hinsichtlich ihrer Ordinate mit der $(m-1)^{ten}$ Näherungskurve überein. – Wäre $2g+1$ durch a teilbar, so würde der in Rede stehende Knotenpunkt schon bei einer früheren Näherungskurve aufgetreten sein, diese Unterscheidung brauchen wir aber fernerhin nicht weiter zu beachten. –

Da der Exponent m und ebenso g eine unbegrenzte ganze Zahl ist, so folgt nebenbei, dass die Knotenpunkte im Gebiete der Variablen x überall dicht liegen d. h. dass in jedem Teilintervalle immer noch Knotenpunkte liegen, wenn nur m gross genug genommen ist.

---

[1] Offenbar hat Weierstrass gerade dieses Satzes wegen a als ungerade Zahl gewählt.

Im Prinzip eine Kleinigkeit schwieriger, aber auch wichtiger, sind die Scheitel.

Es sei jetzt $x = \frac{g}{a^m}$, wo g wieder eine ganze Zahl ist. Dann wird $\cos a^m x\pi \cos g\pi = (-1)^g$.

Da a ungerade ist, so ist auch

$$\cos a^{m+1} x\pi = \cos ag\pi = (-1)^g$$

und ebenso für alle folgenden Glieder, so daß wir das Resultat haben:

Haben wir einen Scheitel vor uns d. h. ist $x = \frac{g}{a^m}$, unter g eine ganze Zahl verstanden, so bekommen alle Glieder der Weierstraßschen Reihe vom m^{ten} Gliede an den Wert $(-1)^g$.

Infolgedessen läßt sich die Reihe sehr gut summieren. Es kommt

$$y = y_{m-1} + (-1)^g \frac{b^m}{1-b}.$$ Mithin:

Für einen Scheitel ist die Endordinate zwar nicht gleich der Ordinate der $(m-1)^{t.}$ Näherungskurve, ergiebt sich aber aus dieser durch Hinzufügung eines einfachen Terms $(-1)^g \frac{b^m}{1-b}$.

Die Scheitel liegen natürlich auch, aus demselben Grunde wie eben die Knoten, überall dicht auf der Abszissenachse.

Das Resultat unserer bisherigen Ueberlegung ist also:

Die Weierstraßsche Funktion ist überall stetig, in einen Streifen von beliebig kleiner Breite eingeschlossen und enthält zwei Reihen unbekannter, überall dicht liegender Punkte. Als stetige Funktion wird sie schon durch die eine dieser Reihen völlig definiert sein.

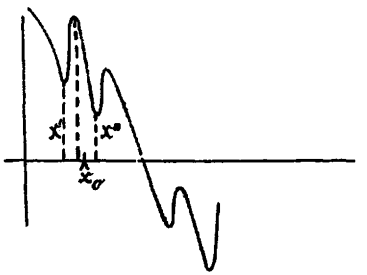
Die nächste Frage, die sich hier nun ganz systematisch anschließt, ist:

Wie steht es mit den 4 Grenzwerten des Differenzenquotienten D^+, D_+, D^-, D_- für jede Stelle x?

Wir werden finden, daß für keinen Punkt x die 4 Derivierten $D^+ \ldots$ übereinstimmen, so daß also für keinen Punkt x unsere Kurve einen eigentlichen Differentialquotienten hat (was eben bewiesen werden soll).

Das Beweisverfahren von Weierstraß ist summarisch, indem er die Stellen x nicht weiter klassifiziert. Wir folgen ihm, um nicht zu viel Zeit mit diesem Gegenstande zu verlieren; es wäre ein leichtes, noch tiefer in die Einzelheiten einzudringen.

Sei x_0 die gegebene Stelle, so betrachtet Weierstraß zunächst die m^{te} Näherungskurve. Von



den beiden Scheiteln dieser Näherungskurve, die dem x_0 benachbart sind, wählt er den näherliegenden (wenn x_0 gerade in der Mitte liegt, den nach links gelegenen). Indem er diesen Scheitel mit $\frac{\alpha_m}{a^m}$ bezeichnet, wo α_m eine ganze Zahl ist, setzt er also

$$x_0 a^m - \alpha_m \left\{ \begin{matrix} > \\ = \end{matrix} \right. \begin{matrix} -1/2 \\ +1/2 \end{matrix}$$

Dieser so bestimmte Scheitel hat wieder nach rechts und links zwei Nachbarscheitel (auf der m^{te} Näherungskurve), deren Abszissen x' und x'' heissen sollen. Für x' und x'' bestimmt man die Ordinaten der Endkurve und verbinde die so erhaltenen beiden Punkte $x'y'$ und $x''y''$ mit dem gegebenen Punkte $x_0 y_0$. Auf diese Weise legt man zwei Differenzenquotienten der Endkurve fest und hat nun zuzusehen, welchem Grenzwert sich die beiden Π nähern, wenn m stets wächst, sodass die Differenzen $x' - x_0$, $x'' - x_0$ beide gegen Null gehen. Wir werden sehen, dass dabei für hinreichend grosse Werte des Produktes ab

$$\frac{y' - y_0}{x' - x_0} \quad \text{und} \quad \frac{y'' - y_0}{x'' - x_0}$$

unendlich grossen Werten von verschiedenen Vorzeichen zustreben, womit die Existenz eines eigentlichen Differentialquotienten ($\Pi^- = \Pi_+ = \Pi =$

D–J ausgeschlossen ist.

Indem wir für y' und y'' folgende Werte

$$y' = \sum_0^{m-1} b^n \cos a^n x' \pi - (-1)^{\alpha_m} b^m \sum_0^{\alpha_m} b^\nu$$

$$y'' = \sum_0^{m-1} b^n \cos a^n x'' \pi - (-1)^{\alpha_m} b^m \sum_0^{\alpha_m} b^\nu$$

in die Differenzenquotienten

$$\frac{y' - y_0}{x' - x_0} \quad \text{und} \quad \frac{y'' - y_0}{x'' - x_0}$$

einsetzen, erhalten wir zunächst für $\frac{y' - y_0}{x' - x_0}$ wenn wir die Summe gleich in zwei Teile spalten

$$\frac{y' - y_0}{x' - x_0} = \sum_0^{m-1} b^n \frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{x' - x_0} +$$

$$+ \sum b^{m+\nu} (-1)^{\alpha m + 1} \frac{1 + \cos a^\nu x_{m+1} \pi}{x' - x_0}.$$

Hierbei haben wir nach Weierstraß die Differenz $a^m x_0 - \alpha_m$ mit x_{m+1} bezeichnet, so daß also $-\frac{1}{2} < x_{m+1} \leqq +\frac{1}{2}$ ist.

Der Kunstgriff, den wir bei der Spaltung benutzen, ist der, daß wir die Differenzenquotienten der „$(m-1)^{\text{ten}}$ Näherungskurve und der „Restkurve" getrennt haben.

Wir gehen nunmehr zur Abschätzung der beiden Differenzenquotienten.

Zuerst der Differenzenquotient der „$(m-1)^{\text{ten}}$ Näherungskurve".

Wenn wir die Differenz des Cosinus in das Produkt zweier Sinus verwandeln, kommt:

$$\sum_0^{m-1} b^n \cdot \frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{x' - x_0} =$$

$$\sum_0^{m-1} b^n \; 2 \cdot \sin a^n \frac{x_0 + x'}{2} \pi \cdot \sin a^n \frac{x_0 - x'}{2} \pi$$

Durch Erweiterung mit $a^n \pi$ und Umsetzung von $2(x' - x_0)$ in $-2(x_0 - x')$ folgt.

$$\sum_0^{m-1} b^n \ldots = \sum_0^{m-1} - \frac{a^n b^n \pi \sin a^n \left(\frac{x_0 + x'}{2}\right) \pi \cdot \sin a^n \frac{(x_0 - x')}{2} \pi}{a^n \frac{x_0 - x'}{2} \pi}$$

Der Sinus, sowie der Sinus dividiert durch sein Argument schwanken beide zwischen $+1$ und -1, so dass die Summe zwischen den Grenzen

$$\pm \pi \sum_0^{m-1} a^n b^n = \pm \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1}$$

enthalten ist. Statt dessen können wir auch einen Faktor ε, der zwischen den Grenzen $+1$ und -1 liegt, einführen, so dass unsere Summe gleich

$$\varepsilon \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1} \text{ wird.}$$

Hier dürfen wir -1 im Zähler auch streichen, da wir dadurch nur die Grenzen noch erweitern. Also läuft unsere ganze Abschätzung darauf hinaus, dass wir den Differenzenquotienten der $(m-1)^{\text{ten}}$ Näherungskurve gleich

$$\varepsilon \pi \frac{a^m b^m}{ab - 1}$$

setzen, wo ε eine Grösse ist, die jedenfalls zwischen $+1$ und -1 liegt.

Indem wir uns nunmehr zum <u>Differenzenquotienten der Restkurve</u> wenden, erhalten wir, wenn wir uns erinnern, dass

$x' - x_0 = \frac{-1 - x_{m+1}}{a^m}$ ist,

$\sum_0^\infty b^{m+r} (-1)^{\alpha_{m+1}} \cdot \frac{1 + \cos a^r x_{m+1} \pi}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m} a^m b^m \sum \frac{1 + \cos a^r x_{m+1} \pi}{x_{m+1} + 1}$

Das erste Glied der Summe wird

$\frac{1 + \cos x_{m+1} \pi}{x_{m+1} + 1}$. Hier ist $-\frac{1}{2} < x_{m+1} \leqq +\frac{1}{2}$

Der Quotient ist also stets positiv, im ungünstigsten Falle Null. Der Nenner schwankt zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$. Mithin ist das erste Glied in der unendlichen Summe, die der Restkurve entspricht, $\geqq \frac{2}{3}$.

Die folgenden Glieder der Reihe sind ebenfalls sämtlich positiv, wenn nicht Null. Es folgt also, daß die Summe unserer unendlichen Reihe $\geqq \frac{2}{3}$ ist.

Damit haben wir folgende Gleichung erhalten, wo η' eine positive Zahl $\geqq 1$ und $\varepsilon' = \frac{(-1)^{\alpha_m}}{\eta'} \cdot \varepsilon$ ist (so daß ε' wie auch ε zwischen ± 1 liegt).

$\frac{y_1 - y_0}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m} a^m b^m \cdot \eta' \left(\frac{2}{3} + \frac{\varepsilon' \pi}{ab - 1} \right)$ oder in Worten:

Der Differenzenquotient der Weierstraß'schen Kurve läßt sich gleich setzen

$(-1)^{\alpha_m} a^m b^m \eta' \left(\frac{2}{3} + \frac{\varepsilon' \pi}{ab-1} \right)$, wo $\eta' \geqq 1$ und ε' zwischen $+1$ und -1 liegt.

Eine analoge Formel erhalten wir für den rechtsseitigen Differenzenquotienten

$\frac{y'' - y_0}{x'' - x_0} = (-1)^{\alpha_m + 1} a^m b^m \cdot \eta'' \left(\frac{2}{3} + \varepsilon'' \frac{\pi}{ab - 1} \right)$, nur

ist hier noch der Faktor (-1) hinzugetreten, der in die Rechnung dadurch hineinkommt, daß jetzt $\frac{x_{m+1}^{+1}}{a^m} = x'' - x_0$ ist, während oben $\frac{x_{m+1}^{+1}}{a^m} = -(x' - x_0)$ war.

Wir wünschen nunmehr in den Differenzenquotienten zu erreichen, daß der Beitrag, den die Restkurve zum Differenzenquotienten gibt, größer ist als der Beitrag, den die $(m-1)^{te}$ Näherungskurve liefert.

Durch eine qualitative Überlegung kommen wir hier vorab zu dem Schlusse:

Zu dem Zwecke wird man dafür Sorge tragen müssen, daß die Teilwellen, die auf die $(m-1)^{te}$ Näherungskurve aufgesetzt sind, möglichst steil werden. Die Steilheit hängt aber von dem Produkte $(a.b)^{ab}$; wir werden also $(a.b)$ recht groß machen wollen.

Quantitativ gestaltet sich die Sache nunmehr der Genaueren so:

Wir wählen den ungünstigsten Fall $\varepsilon' = +1$, dann soll $2/3 > \frac{\pi}{ab-1}$ sein d.h. $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Dies nehmen wir jetzt an, dann ist:

$\eta'(2/3 + \varepsilon' \frac{\pi}{ab-1})$ sicher eine positive Zahl μ_m, die als solche von m abhängt. Dasselbe gilt für

$$\eta''\left(\tfrac{2}{3} + \varepsilon''\frac{\pi}{ab-1}\right) = p''_m .$$

Wir haben zugleich

$$\left.\begin{matrix} p'_m \\ p''_m \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} \eta' \\ \eta'' \end{matrix}\right\} \tfrac{2}{3} + \left.\begin{matrix} \varepsilon' \\ \varepsilon'' \end{matrix}\right\} \frac{\pi}{ab-1} \left.\right\} \geqq \left(\tfrac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right);$$

setzen wir letzteren Ausdruck $= q$, so ist

$$\left.\begin{matrix} p'_m \\ p''_m \end{matrix}\right\} \geqq q \text{, wo nun } q \text{ eine von } m$$

unabhängige positive Zahl ist.

Damit folgen für die Differenzenquotienten die Werte:

$$\frac{y' - y_0}{x' - x_0} \geqq (-1)^{\alpha_m} a^m b^m \cdot q ,$$

$$\frac{y'' - y_0}{x'' - x_0} \geqq (-1)^{\alpha_m + 1} a^m b^m \cdot q .$$

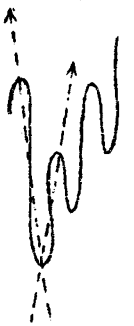
Hiermit haben wir nun die Endformeln auf welche sich Weierstrass' Beweis für die Nichtexistenz eines eigentlichen Differentialquotienten stützt.

Wir lassen nämlich in unsern Differenzenquotienten das m immer grösser und grösser werden, damit das x' von links, das x'' von rechts immer mehr an x_0 herankommt. Wenn es einen eigentlichen Differentialquotienten gäbe, dann müssten die beiden Differenzenquotienten sich dabei immer mehr demselben Werte nähern.

Wenn wir aber m in unsern Formeln für die

Differenzenquotienten wachsen lassen, dann fällt er den zweierlei Differenzenquotienten gar nicht ein, sich denselben Sinus zu nähern; sie werden unbegrenzt gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen! Also hat die Weierstrass'sche Funktion an der Stelle x_0, die ganz beliebig war, keinen bestimmten Differentialquotienten, w.z.b.w.

Ich will das Wesentliche der Sache noch an einer Figur verständlich machen



Wir nehmen x_0 in einem unteren Scheitel der m^{te} Näherungskurve und denken uns, dieser Scheitel für alle folgenden Näherungskurven bleibt. (Hier setzt voraus, dass alle α_m gerade sind.) Dann nimmt die Höhendifferenz der Nachbarscheitel bei wachsendem m allerdings, ebenso wie der seitliche Abstand derselben von x_0 ab, aber weil wir (a.b) so gross genommen haben, nimmt die Höhendifferenz langsamer ab, als der horizontale Abstand. Die Folge ist, dass die Verbindungsgeraden, die den Differenzenquotienten entsprechen, bei wachsendem m steiler und steiler werden und in keiner Weise gewonnen sind, sich einem gemeinsamen Limes

anzuschmiegen.

Hierbei nahmen wir an, daß ein unterer Scheitel der m^{te} Teilkurve unterer Scheitel der $(m+1)^{ten}$ ... Näherungskurven bleibt. So oft sich in der Reihenfolge der ganzen Zahlen $a_{m+1}, a_{m+2} \ldots$ ungerade befinden, wird x_0 natürlich für die betreffende Teilkurve oberer Scheitel, die Nachbarscheitel werden untere Scheitel. Die Figur kehrt sich also um, der Widerspruch gegen die Annahme eines bestimmten Differentialquotienten bleibt dabei aber der gleiche. —

Unsere Betrachtung der Weierstraßschen Funktion hat also ergeben, daß die Voraussetzung der Stetigkeit bei einer Funktion noch nicht die Existenz eines Differentialquotienten bedingt. Wollen wir vielmehr von einer stetigen Funktion, daß sie einen ersten, zweiten und höheren Differentialquotienten besitzt, so müssen wir ihr das ausdrücklich als Bedingung auferlegen. —

Blicken wir auf die Entwickelungen dieses Abschnitts zurück, so ergiebt sich folgendes: Wir legten der empirischen Kurve gewisse Attribute:

1) Zusammenhang
2) Maxima und Minima in endlicher Anzahl in einem endlichen Intervall

3/ Richtung und
4/ Krümmung u. s. w.

von Hause aus bei. Damit etwas Analoges bei dem Funktionsbegriff der Präzisionsmathematik stattfand, mußten wir bei diesem successive die Attribute:

1/ Stetigkeit,
2/ endliche Anzahl von Maximis und Minimis im endlichen Intervall,
3/ ersten Differentialquotienten,
4/ zweiten Differentialquotienten u. s. w.

ausdrücklich postulieren.

Es wird so aus der Gesamtheit der Funktionen eine ganz bestimmte Klasse von Funktionen ausgeschieden, die aber allgemeiner als die analytischen sind, da wir nicht die Existenz beliebig vieler Differentialquotienten bez. die Geltung der Taylor'schen Reihe verlangen. Ich nenne diese Funktionen mit Jacobi die „vernünftigen Funktionen". (Das Wort vernünftig ist hier nur so zu verstehen, daß die Funktionen das Maaß für die Vernunft des Subjekts, das mit ihnen operiert, ergeben)[1].

---

[1] Weiter unten sprechen wir in demselben Sinne von „regulären" Funktionen oder „regulären" Kurven

Mit Acceptierung dieses Ausdrucks können wir also sagen:

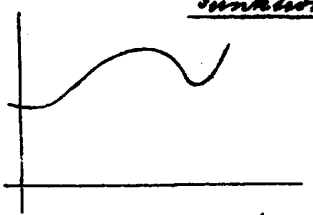
Qualitativ (d. h. der Art nach) finden sich die Attribute, welche man populärer Weise den empirischen Kurven beilegt, bei denjenigen Funktionen $y = f(x)$ der Präzisionsmathematik wieder, welche wir hier die vernünftigen Funktionen nennen.

Damit ist noch nichts über die Frage der quantitativen Uebereinstimmung gegeben, über die wir jetzt in dem folgenden Abschnitt etwas sagen wollen.

Annäherung empirischer Kurven durch vernünftige Funktionen

I, 3 Von der angenäherten Darstellung der Funktionen.

Es sei eine empirische Kurve gegeben. Die Frage ist:



Können wir eine Funktion $y = f(x)$ der Präzisionsmathematik so bestimmen, daß sie hinsichtlich der Ordinaten, Richtung und Krümmung hinreichend mit der empirischen Kurve übereinstimmt? Oder anders ausgedrückt:

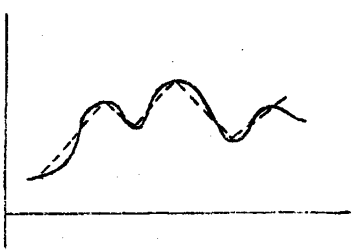
Wie weit kann ich eine empirische Kurve durch vernünftige Funktionen in der angedeuteten Be-

zeichnung approximieren?

Da wir praktisch bei der Approximation keine komplizierten Funktionen benutzen werden, sondern Funktionen von einfacher analytischer Bauart, so reiht sich an obige Fragestellung sofort die andere:

Wie weit kann ich eine empirische Kurve sei es nach Gesamtverlauf, Richtung und Krümmung durch einfache analytisch definierte Funktionen annähern?

Wir überzeugen uns zunächst an einem beliebig vorgelegten Beispiele, daß wir jede empirische Kurve durch eine vernünftige Funktion mit beliebiger Annäherung ersetzen können.

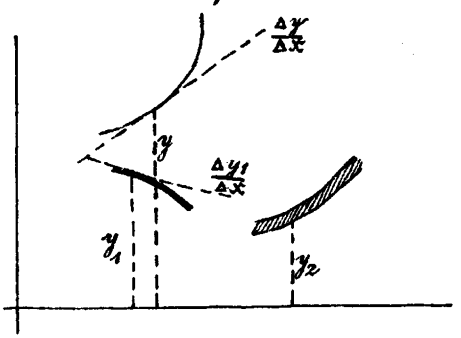


Es sei z. B. die Aufgabe, in der nebenstehenden Figur das Gesetz der Ordinaten durch eine Funktion $y = f(x)$ mit hinreichender Genauigkeit darzustellen. Wir schreiben der Kurve ein geradliniges Polygon von so großer Seitenzahl ein, daß seine Seiten merklich mit den korrespondierenden Kurvenstückchen zusammenfallen. Wie dies im Einzelfalle zu machen ist, ich meine, wie lang die einzelnen Seiten zu wählen sind und wie genau die Ordinaten der einzelnen Eckpunkte empirisch ge-

geben sein mögen, darüber können wir hier nichts Allgemeines aussagen, jedenfalls aber können wir jede empirische Kurve mit der durch die Verhältnisse gebotenen Genauigkeit durch ein geradliniges Polygon ersetzen[1], und dieses Polygon verleiht uns infolge der Axiome der Geometrie (die wir als bekannt voraussetzen) ein Gesetz $y = f(x)$, welches wir als eine Annäherung an die gegebene Kurve betrachten können.

Damit aber haben wir indes noch keine Funktion, die wir überall differenzieren können, geschweige denn eine solche, deren Differentialquotienten überall mit der „Richtung" der empirischen Kurve übereinstimmen; die Uebereinstimmung mit der empirischen Kurve bezieht sich nur erst auf die Ordinaten.

Um auch in Bezug auf die Richtung das Entsprechende zu machen, verfahren wir am einfachsten so, daß wir aus der vorgelegten empirischen Kurve, deren Ordinate y heißt, eine erste „abgeleitete Kurve" herstellen, indem wir für die ursprüngliche Kurve die Richtung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$



[1] Dies ist ein Resultat der praktischen Erfahrung und bildet als solches an die Spitze unserer mathematischen Ueberlegung.

an jeder Stelle x berechnen und diese als Ordinate y_1 einer neuen Kurve auftragen.

Da die empirische Kurve uns nicht genau gegeben ist, sondern nur einen „Streifen" repräsentiert, so wird die Richtung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zwischen ziemlich weiten Genauigkeitsgrenzen schwanken; die „erste abgeleitete Kurve" wird also eine ziemlich bedeutende Breite haben; eine Kontrolle liegt darin, dass allemal (innerhalb der zulässigen Genauigkeitsgrenzen) $\int f'(x)\,dx = f(x)$ sein muss.

Entsprechend können wir eine „zweite abgeleitete Kurve" konstruieren, indem wir die Richtung der ersten abgeleiteten Kurve $\frac{\Delta y_1}{\Delta x} = y_2$ als Ordinate auftragen. Natürlich ist diese dann in einem noch höheren Maasse unbestimmt, u. s. w. u. s. w.

Nachdem wir nun dieses gemacht, ersetzen wir die Kurve y_2 durch ein geradliniges Polygon und erhalten dadurch eine Funktion $f_2(x)$, die zweimal integriert uns eine Funktion $f(x)$ gibt, die die vorgelegte Kurve hinsichtlich der Ordinate, Richtung und Krümmung mit der gewünschten Genauigkeit darstellt. Kurz in Formeln:

$$y_2 = f_2(x)\,,\quad y_1 = \int f_2(x)\,dx \quad y = \int y_1\,dx = \iint f_2(x)\,dx^2 = f(x)$$

Ich resumiere noch einmal so:

Um eine vernünftige Funktion, welche zweimal differentierbar ist, so zu bestimmen, dass sie nicht blos die Ordinate einer vorgelegten empirischen Kurve, sondern auch die Richtung der Kurve und die Krümmung innerhalb der jeweils gegebenen Genauigkeitsgrenzen darstellt, werde ich nur zu der gegebenen Kurve die erste und zweite abgeleitete Kurve konstruieren, so genau dies im empirischen Gebiet möglich ist, diese zweite abgeleitete Kurve durch ein geradliniges Polygon ersetzen und dadurch eine Funktion $f_2(x)$ definieren, welche zweimal integriert diejenige Funktion $f(x)$ ergiebt, welche nur die vorgelegte Kurve in der gewollten Weise approximiert.

Dies ist natürlich nur eine Methode zur Erreichung einer vernünftigen Funktion von den gewollten Eigenschaften; jeder Mathematiker wird sich sofort andere Methoden ausdenken können.

Wie dann eine solche Methode im Einzelnen zu handhaben ist, unterliegt der praktischen Entscheidung von Fall zu Fall. Wir bewegen uns hier gar nicht allein auf dem streng logischen Gebiete der reinen Mathematik, sondern auf einem Gebiete, wo ausser den rein logischen Schlüssen der Mathematik noch ein gewisses Gefühl für das Praktische, Zweckmä-

fige und Erreichbare eine bedeutsame Rolle spielt.
Da wir hier nicht auf die einzelnen Anwendungsgebiete eingehen können und doch nicht umhin können, uns stets so unbestimmt auszudrücken, so wollen wir bei der weiteren Frage nach der approximativen Darstellung durch einfache analytische Formeln uns statt der empirischen Kurve von vornherein eine „vernünftige" Funktion $y = f(x)$ gegeben denken, die je nachdem einmal, zweimal (oder auch öfter) differentiierbar sein soll, und fragen:

Wie weit ist es möglich eine solche vernünftige Funktion durch einfache analytische Ausdrücke (Polynome, trigonometrische Reihen u. s. w.) gut approximieren?

Wir verpflanzen also unsere approximative Betrachtung ganz auf das Gebiet der reinen Mathematik, wo sich alle Prämissen scharf bezeichnen und daher auch alle Aussagen scharf formulieren lassen. Den „angewandten" Disziplinen überlassen wir es aber zu beurteilen, was mit unseren Entwickelungen in den einzelnen Fällen praktisch zu machen ist.

Also nunmehr von der

Annäherung einer vernünftigen Funktion durch einfache analytische Ausdrücke.

Die analytischen Formeln, die man zumeist zur angenäherten Darstellung benutzt, sind

a) endliche Polynome

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Kx^n$$

b) endliche trigonometrische Reihen

$$y = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_\nu \cos \nu x$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_\nu \sin \nu x$$

Wir werden nun davon zu reden haben, wieweit vernünftige Funktionen durch diese einfachen Funktionen dargestellt werden können, und ob sich die Approximation auch auf die Differentialquotienten bezieht.

In den Lehrbüchern ist heutzutage die Approximation der Funktionen durch endliche Reihen zu, rückgedrängt vor der Frage nach der exakten Darstellung durch unendliche Reihen (Taylor'sche, Fourier'sche Reihe). Dies ist aber eine ganz andere Frage, die ihrerseits auch sehr wichtig, in den Anwendungen aber nie zur Geltung kommt. Denn hier kann es sich naturgemäß nur darum handeln, wieweit und in welchem Sinne man durch endliche Reihen approximieren kann. Die Einzel,

tigkeit der modernen Lehrbücher ist nur so zu verstehen, daß die Verfasser nicht aus der Praxis der Wissenschaft heraus schreiben, sondern nur auf Grund theoretischer Beschäftigung, es ist dies im eigentlichen Sinne der Worte Scholastik.

Die Idee der Approximation ist nun wieder eine doppelte. Man kann:

a/ die endlichen Polynome und die endlichen trigonometrischen Reihen nur an einzelnen Stellen an die Funktion resp. ihre Differentialquotienten anschliessen,

b/ aus dem Gesamtverlauf die Koeffizienten entnehmen, indem man etwa nach der Methode der kleinsten Quadrate die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht.

Ich beginne mit den Polynomen, welche sich nur an einzelnen Stellen an die gegebene Funktion anschliessen.

Es sei $y = f(x)$ und es seien n Stellen $x = \alpha, \beta \ldots \ldots \varrho$ gegeben, an welchen das zu suchende Polynom genau die Ordinate der Funktion geben soll.

Das Polynom niedrigsten Grades, welches nur n Konstante enthält, wird uns durch die bekannte Lagrange'sche Interpolationsformel gegeben:

$$y = f(\alpha)\frac{x-\beta \cdot x-\gamma \cdots x-\nu}{\alpha-\beta \cdot \alpha-\gamma \cdots \alpha-\nu} + f(\beta)\frac{x-\alpha \cdot x-\gamma \cdots x-\nu}{\beta-\alpha \cdot \beta-\gamma \cdots \beta-\nu}$$

$$\cdots\cdots + f(\nu)\frac{x-\alpha \cdot x-\beta \cdots}{\nu-\alpha \cdot \nu-\beta \cdots}$$

Sie liefert uns ein Polynom $(n-1)^{\text{te}}$ Grades, welches an den gegebenen Stellen in der Tat genau dieselben Ordinaten besitzt wie die Funktion $y = f(x)$. z.B. für ~~für~~ $x = \beta$ ist $y = f(\beta)$.

Es ist aber eine andere Frage, wieweit an anderen Stellen als den n gegebenen die Lagrange'sche Interpolationsformel unsere Funktion annähert.

Wir setzen, um dies zu entscheiden, unser Polynom $y = \Theta(x)$ und die gegebene Funktion

$$y = \Theta(x) + \text{einem Rest } R(x).$$

Da $R(x)$ für $x = \alpha, \ldots$ verschwindet, können wir den Faktor $\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\nu)$ herausziehen und haben:

$$y = \Theta(x) + r(x) \cdot \varphi(x).$$

Gleichzeitig schreibe ich die Lagrange'sche Formel $\Theta(x) = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x-\alpha} + \cdots + \frac{f(\nu)}{\varphi'(\nu)} \cdot \frac{\varphi(x)}{x-\nu}$

Soll nun die Lagrange'sche Formel brauchbar sein, so muß das $r(x)$ in dem Intervall, in welchem ich die Formel benutzen will, einen unbedeutenden Betrag haben. Wir haben

also folgende zentrale Fragestellung:

Kann man das $x(x)$ so in Grenzen einschließen, daß $\Theta(x)$ als angenäherter Ausdruck für $f(x)$ zu gelten vermag?

Man bezeichnet das Gebiet, mit dem wir uns hier beschäftigen, gewöhnlich mit dem Worte Interpolation. Dieser Name hat darin seinen Ursprung, daß man sich den Wert x, für den man die Funktion $f(x)$ annähern will, innerhalb des Intervalls $\alpha \ldots\ldots \nu$ gelegen denkt. Unsere Frage betrifft aber ebensowohl solche x, welche ausserhalb des Intervalls liegen (Problem der Extrapolation)

Von diesem allgemeinen Ansatz gehen wir zu speziellen Fällen über, indem wir annehmen, daß zwei oder mehrere Punkte $\alpha, \beta \ldots$ zusammenfallen d.h. uns an einzelnen Stellen auch der erste und weitere Differentialquotienten gegeben seien.

Sind uns also ausser $f(\alpha)$, $f(\beta) \ldots$ auch $f'(\alpha)$, $f'(\beta) \ldots$ gegeben, so entsteht die Frage:

Wie konstruiere ich ein Polynom, welches an den Stellen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ nicht nur die gewollten Ordinaten, sondern auch diese vorgegebenen Differentialquotienten hat?

Es läßt sich dies entweder direkt erledigen oder

auch aus der Lagrange'schen Formel durch Grenzübergang ableiten, und es ist dann die Frage, wie weit das so gewonnene Polynom als Approximation für $f(x)$ und seine Differentialquotienten interpolatorisch und extrapolatorisch zu gebrauchen ist. –

Lassen wir insbesondere alle Punkte $\alpha, \beta, \ldots \nu$ in einen Punkt zusammenfallen, so ergiebt sich die Taylor'sche Formel:

$$f(x) = f(\alpha) + f\frac{(\alpha)}{1}(x-\alpha) + f'\frac{(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots + f\frac{^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(x-\alpha)^{n-1} + R(x)\cdot(x-\alpha)^n.$$

Auf die Ableitung derselben aus der Lagrange'schen Formel, die sich übrigens leicht ergiebt, gehe ich hier nicht ein.

Was uns nun bei der Lagrange'schen Formel und ihren Spezialfällen besonders interessirt ist, wie wir schon sagten, die Abschätzung des Restgliedes.

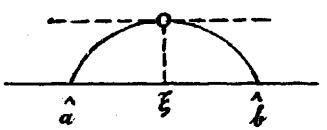
Diese wird bei der Taylor'schen Reihe in allen Lehrbüchern der Differential und Integralrechnung gegeben. Dagegen für die Lagrange'sche Formel findet sie sich selten. Ich lehne mich bei den folgenden Betrachtungen besonders an das Buch von

A. Markoff: Differenzenrechnung 1891, deutsch von Friedendorff u. Prümm, Leipzig 1896, an

Die Grundlage für die Abschätzung des Restes ist allemal das bekannte Theorem von Rolle. Rolle ein französischer Geometer, lebte zu der Zeit der Entstehung der Differential- und Integralrechnung (1652-1719). Natürlich hat er den Satz, der seinen Namen trägt, nicht in der Form, wie wir ihn jetzt geben, gefunden oder bewiesen. Aber der Gedanke, dass hier ein besonderer Satz nötig sei, geht auf ihn zurück.
Wir sagen so:

Es sei $f(x)$ eine stetige und mindestens einmal differenzierbare Funktion, die an zwei Stellen a und b verschwindet, dann wird behauptet, dass die Derivierte $f'(x)$ mindestens einmal im Intervall a .... b verschwindet.

Der Beweis gestaltet sich einfach. Wir nehmen an, dass $f(x)$ im Intervalle a ... b positive Werte habe (was keine wesentliche Einschränkung ist[1]) und erinnern uns, dass nach dem Satze



[1] Hätte sie nur negative Werte, so würde man nach dem Maximum von $-f(x)$ fragen.

von Weierstraß $f(x)$ als stetige Funktion in dem Intervall ihre obere Grenze für eine bestimmte Stelle ξ erreicht. Da wir nun $F(x)$ einmal differentiierbar annehmen, so folgt $F'(\xi) = 0$

Die einfachen Elemente, auf die sich dieser Beweis aufbaut, sind, wie Sie sehen, der Weierstraßsche Satz und die Voraussetzung der einmaligen Differenzierbarkeit von $F(x)$.

Wir werden jetzt den Satz auf 3 Punkte a, b, c ausdehnen, für die $F(x)$ verschwinden soll, wo dann aus zweimaliger Anwendung des Rolle'schen Theorems folgt, daß $F''(x)$ mindestens einmal im Intervall $a \ldots c$ verschwindet.

Damit erhalten wir folgenden Satz, den ich in der Form aussprechen, wie wir ihn brauchen werden:

Ist $F(x)$ eine Funktion, die an κ Stellen verschwindet, ist ferner $F(x)$ stetig und hinreichend oft differenzierbar, dann wird der $(\kappa-1)^{te}$ Differentialquotient in dem Intervall der genannten Nullstellen mindestens eine Wurzel ξ haben.

Dieser Satz führt uns nun bei der Lagrange'schen Interpolationsformel folgendermaßen zur Abschätzung des Restes.

Wir betrachten die Funktion

$F(z) = f(z) - \Theta(z) - r(x) : \varphi(z)$, wo $\Theta(z)$ [vom $(n-1)^{ten}$ Grade] das Lagrange'sche Poly. vom ohne Restglied bedeutet und $\varphi(z)$ vom n^{ten} Grade ist; x ist ein beliebiger Wert.

Für die Funktion $F(z)$ kennen wir nun eine Reihe von Nullstellen. Erstens die $\alpha, \beta, \ldots \nu$. In der Tat wird für diese $\Theta(z) = f(z)$ und $\varphi(z) = 0$, also $F(z) = 0$. Ferner ist x eine Nullstelle. Denn für $z = x$ ist nach Definition $f(x) = \Theta(x) + r(x) \cdot \varphi(x)$; also $F(x) = 0$.

Somit können wir auf $F(z) = 0$ das Rolle'sche Theorem anwenden, indem wir $k = n+1$ nehmen. Es folgt, daß $F^{(n)}(z)$ mindestens eine Wurzel ξ im Intervalle $\alpha \ldots \nu, x$ hat. Rechnen wir diesen n^{ten} Differentialquotienten aus, so kommt

$$F^{(n)}(z) = f^{n}(z) - r(x) \cdot n! \quad (\Theta(z) \text{ als vom Grade } (n-1) \text{ und } r(x) \text{ als Konstante geben keinen Beitrag, } \varphi(z) = z^n + \ldots \text{ liefert den Zahlenfaktor } n!).$$

Also haben wir für das betreffende ξ:

$$f^{(n)}(\xi) - r(x)\, n! = 0 \text{ und damit}$$

$$r(x) = \frac{f^{n}(\xi)}{n!}.$$

Setzen wir diesen auf so einfachem, aber doch sehr sinnreichem Wege gefundenen Wert von $r(x)$ in die Lagrange'sche Formel mit Restglied

ein, so folgt

$$f(x) = \Theta(x) + \varphi(x)\,\frac{f^n(\xi)}{n!},$$

wo also ξ, uns sonst nicht bekannt, irgendwo in dem Intervalle $\alpha, \beta, \ldots \nu, x$ liegt. Wir haben daraufhin:

Die Lagrange'sche Formel ist brauchbar, mit andern Worten, wir dürfen $f(x)$ annähernd durch $\Theta(x)$ ersetzen, sofern der Ausdruck $\varphi(x) \cdot \frac{f^n(\xi)}{n!}$ für alle im Intervall gelegene ξ eine hinreichend kleine Grösse ist. Dabei ist einerlei, ob x zwischen $\alpha \ldots \nu$ oder jenseits derselben liegt. Unsere Formel mit Restglied dient ebensowohl zur Interpolation wie zur Extrapolation.

Wollen wir jetzt speciell die Taylor'sche Formel anschreiben, so folgt

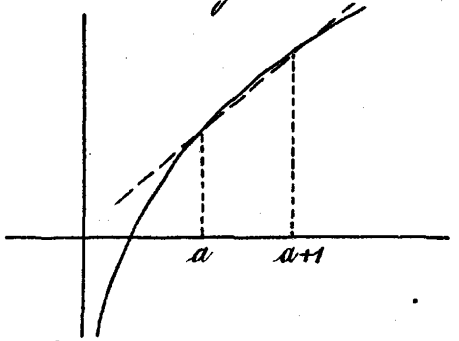
$$f(x) = f(x) + f'(x\,\frac{x-x}{1} + \ldots + f^{(n-1)}(\alpha) \cdot \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + 1$$
$$+ f^n(\xi) \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!}.$$

Die Form des Restgliedes ist hier dieselbe, die man in der Differentialrechnung bei der Taylor'schen Reihe vorzutragen pflegt.

Uebrigens haben wir es bei der Taylor'schen Formel nur mit Extrapolation zu tun, natürlich, da alle $\alpha, \beta, \ldots \nu$ in einen Punkt zusammenfallen.

Ich berichtige nun an einer Reihe von Beispielen die Bedeutung der Dinge klar zu machen.

In erster Linie spreche ich von der Anwendung der Formel, die Sie alle bei dem Gebrauch der Logarithmentafeln von ihr machen. Wir finden in den Tafeln den Logarithmus zweier Zahlen a und a+1.



Die Frage ist: Dürfen wir geradlinig interpolieren d.h. das Stückchen der Logarithmus-Kurve zwischen den Ordinaten log a und log (a+1) durch die Sehne ersetzen?

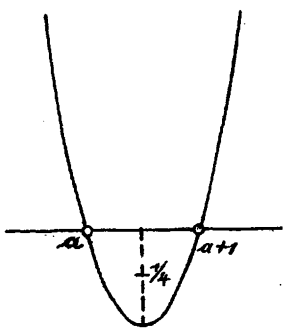
Die Lagrange'sche Formel für den Fall n = 2 und f(x) = log x wird.

$$\log x = \log a + (x-a)\{\log(a+1) - \log(a)\} + R.$$

Der Rest wird

$$R = f''(\xi)\frac{(x-a)(x-a-1)}{2}.$$

Wir erhalten diesen noch weiter ab: $f'(x) = \frac{d}{dx}\log x$ ist $= \frac{M}{x}$, wo M der Modul des Logarithmensystems ist. $f''(x)$ wird $= -\frac{M}{x^2}$. Das Produkt $(x-a)(x-a-1)$ ist durch eine Parabel versinnlicht, die ihre maximale Ordinate $-1/4$ für $x = \frac{a+(a+1)}{2}$ annimmt.



Fragen wir diese Werte in obige Formel ein, so kommt als obere Grenze des Fehlers, den wir durch Weglassung des Restgliedes begehen, $\frac{M}{8\xi^2}$. Also:

Wenn wir einen Logarithmus mit Proportionalteilchen berechnen, so bekommen wir einen Wert, der zu klein ist, aber höchstens um $\frac{M}{8\xi^2}$. Hier ist ξ irgend ein Wert zwischen a und (a+1). Der Fehler ist gewiss kleiner als $\frac{M}{8a^2}$.

Machen wir uns noch die Grösse des Fehlers numerisch klar. Wir wollen 7-stellige Tafeln benutzen wo wir die Logarithmen 5-stelliger Zahlen ohne weiteres angegeben finden. Es ist also a und mithin auch ξ fünfstellig. Den Modul ersetzen wir durch die etwas grössere Zahl 0,5 und erhalten, indem wir für a die kleinste 5-stellige Zahl (für welche der Fehler am grössten ist) wählen, als obere Grenze des Fehlers

$$\frac{0,5}{8 \cdot 10000^2} = \frac{1}{1600\,000\,000}$$

Wir überzeugen uns also, dass der Fehler, der bei Benutzung der Proportionalteilchen entsteht, wesentlich kleiner ist, als der Fehler, der dadurch herauskommt, dass die Logarithmen der 5-stelligen ganzen Zahlen nur bis auf 7 Stellen mitgeteilt sind.

Als zweiter Beispiel gebe ich Erläuterungen

zum Taylor'schen Satz, den wir schreiben:

$$f(x) = f(x) + \ldots + f^{(n-1)}$$

Diese Taylor'sche Formel hat ihre gute Bedeutung, auch wenn $f(x)$ nicht unbegrenzt differenzierbar ist.

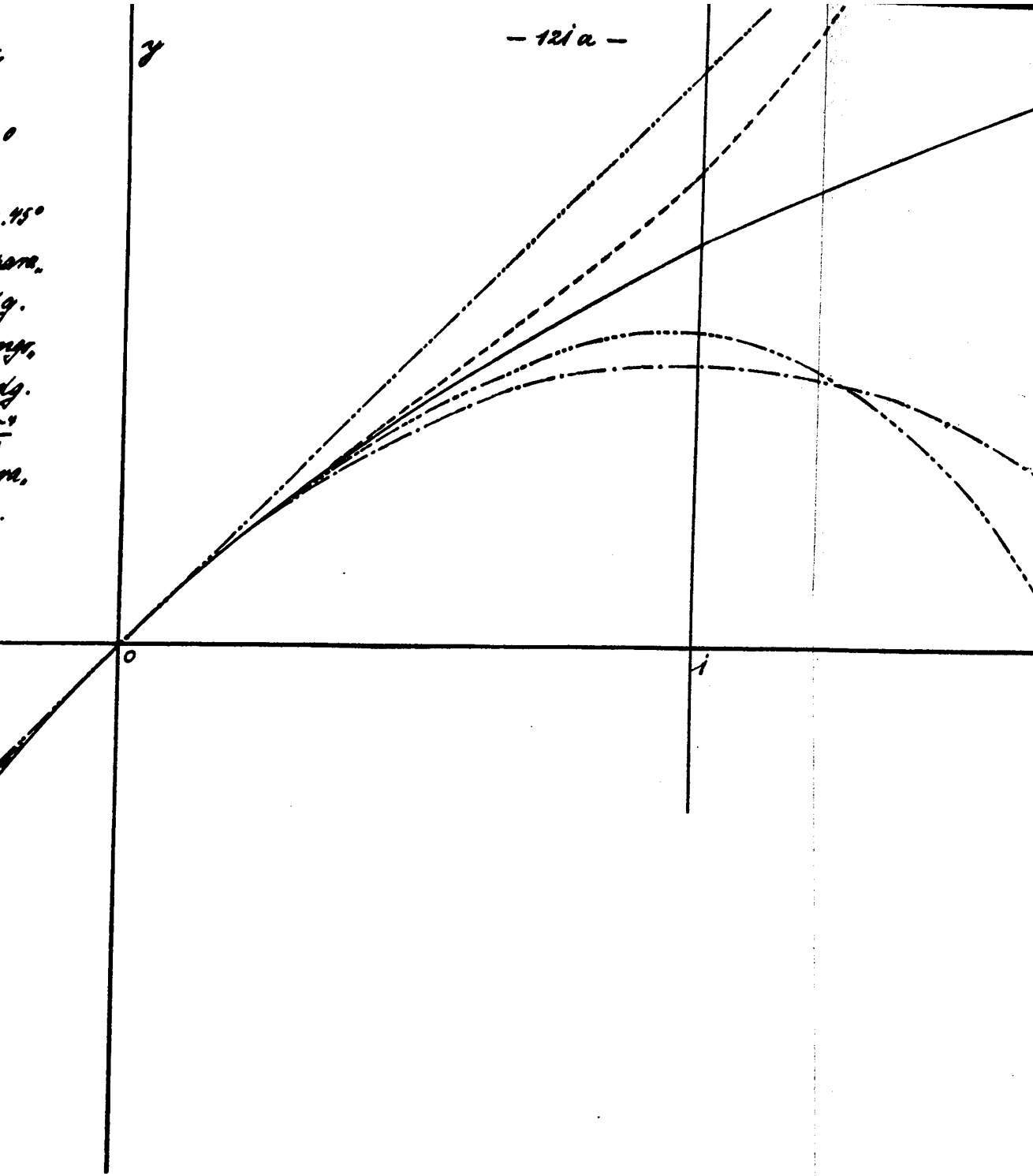
Wenn $f(x)$ unbegrenzt differenzierbar ist, wie man in allen Büchern gewöhnlich voraussetzt, dann kann offenbar $f(x)$ nur in dem Falle gleich der unendlichen Reihe gesetzt werden, wenn der Rest bei wachsendem n unter jeden Betrag hinabsinkt. Dies ist in zahlreichen Fällen für hinreichend kleines $|x-\alpha|$ der Fall; man hat dann ein „Konvergenzintervall". Es kann aber auch für alle $|x-\alpha|$ gelten ($f(x)$ = ganze Funktion) oder für gar keine (Beispiel e^{-1/x^2} bei $x = 0$).

Im Falle überhaupt Konvergenz stattfindet, ist es interessant, das Verhalten der successiven Näherungskurven zu beobachten. Ich illustriere dies an dem Beispiel

$$y = \log(1+x).$$

Ich will diese Funktion durch die Taylor'sche Reihe für den Punkt $x = 0$ darstellen.

Die erste Annäherung gibt uns die Tangente, die zweite eine Parabel u. s. w. Das Hauptinteresse


y
0
1

esse ist für uns aber darauf gerichtet, daß die Reihe für $|x| \leqq 1$ tatsächlich gegen $f(x)$ konvergiert, nicht aber mehr für $x > 1$. Dies kommt in der anliegenden Figur dadurch zur Geltung, daß sich die successiven Näherungskurven in dem Intervall $-1 \ldots +1$ mit wachsendem n immer besser an die Logarithmuskurve anschließen, jenseits $+1$ sich aber abwechselnd plötzlich in die Höhe heben oder steil nach unten sinken, so daß von einer Approximation der logarithmischen Kurve durch unsere Näherungskurven in keiner Weise die Rede ist.

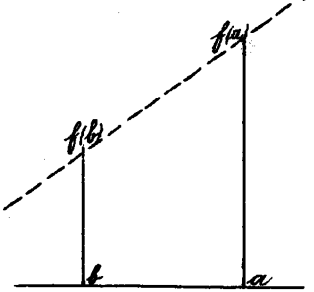
Man bildet übrigens leicht Beispiele wo eine bestimmte Näherungskurve weit über das Konvergenzintervall der unendlichen Reihe vortrefflich approximiert. Ich kann Sie nur bitten, sich selbst hierher gehörige Beispiele zu bilden und das jeweilige Maaß der Annäherung sich durch Figuren lebendig zu machen.

Ich gehe nunmehr zur Behandlung der weiteren Frage über: <u>Wie weit ermöglicht die Lagrange'sche Formel mit Restglied die Approximation des Integrals bez. der Differentialquotienten einer Funktion $y = f(x)$?</u>

Zunächst die Approximation des Integrals. Hierüber findet man das Wichtige in den meisten Lehrbüchern, da die auf die Lagrange'sche Formel gegründete Auswertung des von einer Kurve umspannten Flächeninhalts überall im Gebrauch ist (sog. mechanische Quadratur). Dagegen verweise ich wegen der genannten Fehlerabschätzung, die oft fortgelassen oder nicht so eingehend behandelt wird, auf meine Vorlesung über Integralrechnung (WS 1896/7)[1]. Hier gebe ich nur eine kurze Zusammenstellung von 4 wichtigen einfachen Fällen, deren Details Sie in der eben genannten Vorlesung nachlesen mögen.

Es sei $\int_b^a f(x)\,dx$ zu berechnen.

a) Es seien in den Punkten b und a die Ordinaten der Funktion gegeben, worauf wir die Kurve durch die Sehne $f(b)\,f(a)$ ersetzen (also in der Lagrange'schen Formel $n=2$ nehmen). Dann berechnet sich



$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(a-b) + \frac{f''(\xi)(a-b)^3}{12}$$ d. h. gleich dem Inhalte des Trapezes plus dem Restgliede, in dem ξ eine uns unbekannte Grösse in dem Intervall b ... a bezeichnet.

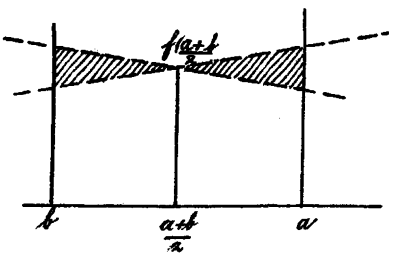
[1] Nicht autographiert

b) Eine andere Methode auch geradlinig zu interpolieren ist die für die Abszisse $\frac{a+b}{2}$ nicht nur die Ordinate $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, sondern auch die Richtung der Tangente d. h. $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ zu geben. Dann kommt:

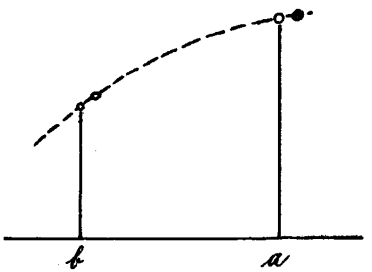
$$\int_b^a f(x)\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(a-b) - \frac{f''(\xi)(a-b)^3}{24} \quad \text{d. h.}$$

der Fehler wird halb so groß wie im vorhergehenden Falle und hat entgegengesetzter Zeichen.

Merkwürdig ist hier, daß die Richtung d. h. $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ganz aus der Endformel herausfällt. In der Tat ist es für den Inhalt des Trapezes, durch welches wir den Kurveninhalt approximieren, gleichgültig, in welcher Richtung die betr. Trapezseite durch $x = \frac{a+b}{2}$, $y = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ hindurchläuft.



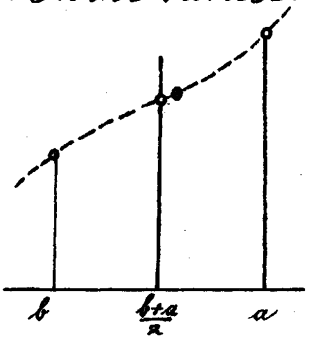
c) Wollen wir entsprechend für $n = 4$ die Lagrange'sche Formel anschreiben d. h. die Kurve durch eine Parabel 3. Ordnung approximieren, so empfiehlt es sich, die Parabel dadurch zu bestimmen, daß man für die Punkte b und a sowohl die Quotienten als auch die Richtungen der Parabel gibt. Man erhält dann:



$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(a-b) - \frac{f'(a)-f'(b)}{2}(a-b)^2 + \frac{f^{IV}(\xi)(a-b)^5}{720}$$

Einfachster Fall der sog. Euler'schen Formel).

d) Eine andere Art, die cubische Parabel fest zu legen, ist die, sie durch die Endpunkte der Ordinaten $f(b)$ und $f(a)$ und durch den Endpunkt der Ordinate $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ mit vorgegebener Richtung f' gehen zu lassen. Dann fällt wieder f' für die Mittelordinate in der Endformel heraus. Es wird.



$$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}(a-b) - \frac{f^{IV}(\xi)(a-b)^5}{2880}$$

Die letzte Zeile enthält die Inhaltsbestimmung, die bei der sogenannten Simpson'schen Regel in Anwendung kommt. Ich mache hier viel leicht folgende Notiz, die weiter in der Litteratur zu verfolgen ist.

Auch bei der Simpson'schen Formel fällt ein Datum, nämlich $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ heraus. Gauss hat prinzipiell untersucht, wie man n Punkte im Intervall wählen muss, damit von den zugehörigen Daten bei der Ausführung der Integration möglichst viele in Wegfall kommen.

Als Litteratur über diesen wichtigen Gegenstand führe ich das Buch von Markoff an und vielleicht den Ingenieur-kalender, die Hütte, in dem auch die genannten Formeln, aber (in der mir zur Verfügung stehenden Auflage) mit falschen Zahlenkoeffizienten in den Restgliedern gegeben sind.

Was nun die Frage angeht, wieweit die Lagrange'sche Formel mit Restglied den Differentialquotienten von $f(x)$ approximiert, so machen wir folgenden Ansatz:

Die Funktion $f(x) - \Theta(x) = 0$

hat n uns bekannte Wurzeln $\alpha, \beta \ldots \nu$.

Vergleichen wir jetzt $f'(x)$ mit $\Theta'(x)$ so fragen wir vor allem nach den Wurzeln der Gleichung

$$f'(x) - \Theta'(x) = 0$$

aus dem Rolle'schen Theorem können wir sofort sagen, daß sie mindestens $(n-1)$ Wurzeln α', β', μ' zwischen $\alpha \ldots \nu$ hat. Nun ist der Ansatz, den ich hier vorschlage, der, daß wir unter $f(x)$ das Produkt $(x-\alpha')\ldots(x-\mu')$ verstanden,

$$f'(x) = \Theta'(x) + s(x) \cdot \psi(x)$$

setzen, wo man $s(x)$ ganz analog wie $r(x)$ in der Stammformel abschätzen kann.

Es folgt leicht

$$S(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!},$$ so daß das Resultat so in Worte zu fassen ist:

Sogut wir setzen können

$$f(x) = \Theta(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot \varphi(x),$$

genau so gut haben wir eine Annäherungsformel für den Differentialquotienten

$$f'(x) = \Theta'(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} \cdot \chi(x),$$

wo $\chi(x)$ das Produkt der neuen Faktoren $(x-a')$, $\ldots (x-\mu')$ ist und ξ' eine uns unbekannte Größe im Intervall $\alpha' \ldots \mu'$, x.

Im Einzelfalle muß man natürlich sehen, wie man sich mit der Funktion $\chi(x)$ zurecht findet. Kann man die Wurzeln von $\chi(x)$ nicht einzeln bestimmen, so kann man den Wert von $\chi(x)$ doch abschätzen, u. s. w. u. s. w. —

Ich möchte an dieser Stelle noch einen Passus einflechten, um den Begriff der

analytischen Funktion

allgemein zu besprechen und klarzulegen, wie weit derselbe hier eingreift, oder vielmehr nicht eingreift.

Wir gehen von der Taylor'schen Formel aus:

$$f(x) = f(x) + (x-\alpha) f'(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

Ich bemerke hier ausdrücklich, daß die Taylor'sche Formel mit Restglied nicht die unbeschränkte, sondern nur die n-malige Differentiierbarkeit der Funktion $f(x)$ voraussetzt. Ich füge der Deutlichkeit halber noch hinzu: In den Anwendungen wird die vorstehende Formel nach Möglichkeit so gebraucht, daß man in dem Intervalle, mit dem man sich beschäftigt, das Restglied vernachlässigen darf.

Wann nennen wir $f(x)$ nun eine analytische Funktion?

Dazu sind zwei Bedingungen erforderlich:

Erstlich muß es formal möglich sein die Taylor'sche Formel bis ins Unendliche fortzusetzen d. h. es müssen unbeschränkt viele Differentialquotienten existieren.

Und zweitens muß der Rest bei wachsendem n beliebig klein werden.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann darf man in dem betrachteten Intervall

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha) f'(\alpha) + \ldots \text{ in inf.}$$

setzen.

Es ist üblich die endliche Formel mit Restglied den Taylor'schen Satz die unendliche Formel die Taylor'sche Reihe zu nennen, so daß wir jetzt sagen

können:

f(x) heißt in der Umgebung der Stelle $x=\alpha$ eine analytische Funktion, wenn es innerhalb eines den Punkt α umgebenden Intervalls durch die Taylor'sche Reihe genau darstellbar ist.

Damit ist schon gesagt, daß der Begriff der analytischen Funktion nur der Präzisionsmathematik angehört. Hier erwähnen ferner, daß man sich erst in neuer Zeit die Bedingungen klar gemacht hat, unter denen die Taylor'sche Reihe eine Funktion in einem Intervalle darstellt.

Die alte Ansicht war, daß hierzu allein schon die formale Konvergenz der Reihe genüge. Daß einzelne Punkte eine Ausnahme bilden können, hat schon Cauchy bemerkt. Es gibt aber Funktionen, die unbegrenzt differentiierbar sind und die an keiner Stelle durch die Taylor'sche Reihe dargestellt werden. In dieser Hinsicht hat A. Pringsheim 1893 in Chicago, Papers *) und Math. Ann. 44 einen gewissen Abschluß erreicht, indem er angab, welche Bedingungen zu der unbegrenzten Differentiierbarkeit der Funktion noch hinzukommen müssen, damit die Taylor'sche Reihe

*) Mathematical papers read at the International Mathematical Congress held in Chicago 1893; New York 1896.

die Funktionen wirklich darstellt, damit also der Rest für wachsendes n unter jede vorgegebene Grösse herabsinkt.

Mit dem Umstande, dass diese verschiedenen Dinge nicht immer scharf geschieden sind, hängt die von uns schon wiederholt genannte Ansicht, (die man in vielen Büchern findet,) zweifellos zusammen, dass in der Natur nur analytische Funktionen vorkommen.

Wenn man diese Ansicht näher prüft, so ergiebt sich, dass sie aus 2 Quellen hervorgewachsen ist:

1) aus der Meinung, dass in der Natur nur Funktionen vorkommen, die differentiierbar und damit unbegrenzt oft differentierbar sind (einer Auffassung, die für die populäre Auffassung mit der Stetigkeit der Naturerscheinung gegeben erscheint);

2) aus dem Umstande, dass man von der Notwendigkeit der Pringsheim'schen Bedingungen nichts wusste und sich um sie keine Sorge machte.

Ich stelle einer solchen Ansicht natürlich die andere entgegen, dass wir es bei den Naturvorgängen unmittelbar nur mit Funktionen

streifen zu tun haben und dass die Entschei-
dung der Frage, ob es sich empfiehlt, die Natur-
vorgänge präzisionsmathematisch auf bestimm-
te Klassen stetiger Funktionen stetiger Variabler
zu beziehen, über unser Wahrnehmungsvermögen
hinausgeht und in das Gebiet der Metaphysik
hinüberführt.

Ganz etwas anderes ist es aber, wenn die Mathe-
matiker aus mathematischen Gründen die ana-
lytischen Funktionen bevorzugen, und ich will
hier in einem Anhange etwas über

die mathematischen Vorzüge der analy-
tischen Funktionen.

sagen.

Diese liegen in dem Umstande begründet, dass
man die analytischen Funktionen auch für
komplexes $x = u+iv$ definieren kann. Setzt
man den Wert $x = u+iv$ in die Taylor'sche Rei-
he ein, so erhält man sofort die Entwickelung
der Funktion $f(x)$ für komplexe Variable. Umge-
kehrt aber beschränkt sich die Theorie der kom-
plexen Funktionen auch auf die so entstehen-
den analytischen Funktionen. Also:

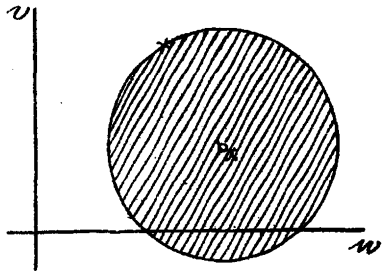
Die analytischen Funktionen einer Variablen

aber auch allgemein die analytischen Funktionen schlechtweg, gestatten eine Erweiterung auf komplexe Variable.

Wie sich dies im Einzelnen gestaltet, muß in einer Vorlesung über Funktionentheorie entwickelt werden. Ich kann hier nur einzelne springende Punkte hervorheben.

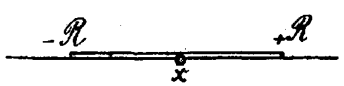
Zunächst über das Konvergenzgebiet der Taylor'schen Reihe.

Die Funktionentheorie zeigt, daß das Konvergenzgebiet der Taylor'schen Reihe für einen Punkt α in der komplexen Ebene ($x = u + iv$) diejenige um α als Mittelpunkt herumgelegte Kreisfläche ist, deren Peripherie durch den nächst gelegenen singulären Punkt der Funktion hindurchgeht. (wie die Reihe sich auf der Peripherie verhält, bleibt zweifelhaft und ist von Fall zu Fall zu entscheiden.)



Beschränken wir uns auf reelle Veränderliche, so hat dieser Satz hier offenbar folgende Rückwirkung:

Das Konvergenzgebiet der

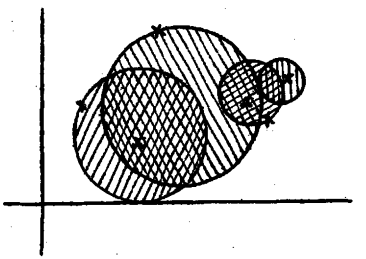


streckt sich im Reellen immer gleich weit nach rechts und links von der betrachteten Stelle aus, unentschieden bleibt aber, wie sich die Reihe in den Endpunkten verhält.

Ich erläutere aus der Theorie der komplexen Funktionen noch die Begriffe: <u>Funktionselement und analytische Fortsetzung</u>.

Man nennt nach Weierstraß die Gesamtheit der Werte, die eine Funktion im Konvergenzgebiet der einzelnen Taylor'schen Reihe annimmt, ein Funktionselement der analytischen Funktion. Es ist also die Funktion im Innern der Konvergenzkreises durch das Funktionselement definiert.

Man kann nun aber in zahlreichen Fällen über dieses Gebiet weiter hinausgehen, indem man innerhalb desselben einen neuen Wert β gibt und die Reihe nach Potenzen von $(x-\alpha)$ in eine andere nach Potenzen von $x-\beta$ umsetzt.



Diese neue Reihe konvergiert in einem Kreise, der möglicherweise über den ersten hinübergreift. Man bekommt also eine Definition der Funktion für ein neues Stück der komplexen Ebene. Diesen Pro-

zess, den man gegebenfalls beliebig weiter führen kann, bezeichnet man als analytische Fortsetzung der Funktion.

Zusammenfassend werden wir also sagen: Die ursprüngliche Reihe ergiebt unmittelbar nur ein erstes Element der in Betracht kommenden analytischen Funktion, nämlich soweit der Konvergenzkreis der Punkte α reicht. Man kann aber durch sog. analytische Fortsetzung (allgemein zu reden) über den ersten Bereich hinausgehen und so die Funktion in immer grösseren Bereichen definieren. Die analytische Funktion schlechthin gewonnen ist der Inbegriff des ersten Elementes und der aus ihm durch Wiederholung der geschilderten Prozesses entstehenden analytischen Fortsetzungen.

Die nähere Ausführung gehört natürlich in eine Vorlesung über analytische Funktionen. Für uns kommt mehr die philosophische Seite der Sache in Betracht. Wir fragen zunächst:

Was müssen wir von einer analytischen Funktion wissen, damit wir ein Funktionselement derselben kennen (aus dem wir dann fernerhin auf den Gesamtverlauf der Funktion schliessen

können)?

Offenbar ist dazu erforderlich, aber auch ausreichend, dass wir die Koeffizienten $f(x)$, $f'(\alpha)$ .... in der zum Punkte $x = \alpha$ gehörigen Taylorschen Entwickelung kennen. Diese sind als Limiten von Differenzenquotienten definiert, so dass sie festgelegt sind, wenn wir ein beliebig kleiner (aber endliches) Stück der Kurve bei $x = \alpha$ kennen. Damit haben wir das Ergebnis:

Das Funktionselement seinerseits ist bei einer analytischen Funktion durch ein beliebig kleines Stück der Kurve $y = f(x)$ vollkommen gegeben.

Sie sehen, welche besondere Bewandnis es mit den analytischen Funktionen hat. Sie werden bereits durch ein beliebig kleines Stück in ihrem Gesamtverlauf gegeben, aber wohl verstanden nur im Sinne der Präzisionsmathematik, da sich nur hier die Koeffizienten $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ ... als Limiten von Differenzenquotienten (mit absoluter Schärfe) definieren lassen.

Wenn wir uns jetzt wieder nach der mathematischen Darstellung der Naturerscheinungen umschauen, so macht man gewöhnlich den Ansatz, dass man die Koordinaten x, y, z als analytische

Funktionen der Zeit anschreibt:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Dies führt nach unseren obigen Bemerkungen zum vollkommenen Determinismus: die Bahn eines Teilchens in einem noch so kleinen Zeitintervall liegt unverbrüchlich die Bahn in allen folgenden Zeiten fest. Wir müssen daher sagen:

Wenn es wahr ist, daß in der Natur nur analytische Funktionen vorkommen, daß insbesondere die Bewegung jedes einzelnen Teilchens durch analytische Funktionen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ geregelt wird, dann ist zwingend richtig, daß der Verlauf der Welt durch ihr Verhalten in einem kleinsten Zeitintervall voraus bestimmt ist.

Das sind Folgerungen, die manchem unsympathisch sind. Daher findet man dieser ersten Auswahl verschiedentlich die andere gegenübergestellt, wonach die Bahnen nicht durch analytische Funktionen, sondern nur durch Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten gegeben sind. Also etwa

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \text{analytische Fkt. von } x, y, z, t, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

. . . . . .

Diese Auffassung ist die, welche sich aus dem Studium der theoretischen Mechanik herausgebildet hat

Dies führt nicht zu ganz denselben strengen Folgerungen wie oben. Es können nämlich die Lösungen solcher Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten sogenannte „Verzweigungsstellen" darbieten, wo es fraglich ist, ob der Punkt auf der einen oder andern Bahn weitergeht, (Man denke an die Beziehung zwischen den allgemeinen Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung und den singulären Lösungen, welche als Enveloppe der ersteren auftreten können).

In einem solchen Verzweigungspunkt wäre dann nach der genannten Ansicht die Bewegung eines Punktes nicht allein durch die allgemeinen mechanischen Naturgesetze bestimmt, sondern es ist die Möglichkeit offen gelassen, dass der Punkt hier noch durch einen ausermechanischen Anlass determiniert wird. Besonders hat J. Boussinesq in Paris diese Idee mit Leidenschaft verfolgt und glaubt geradezu in dem Umstande, dass bei der Integration der Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten sich solche Verzweigungsstellen einstellen können, den Platz gefunden zu haben, wo in die allgemeine

mechanische Weltordnung eine andere Potenz (bei logischer oder ethischer Art) sich einmengen kann. Er meint durch das Auftreten solcher Stellen sowohl das Vorhandensein des freien Willens, als auch den Unterschied zwischen lebender und toter Materie erklären zu können. (Es entscheidet also das Prinzip des lebenden Organismus in einem solchen Verzweigungspunkte über den Weg der betreffenden Massenpunkte). Man vergleiche in dieser Beziehung die Publikation:

J. Boussinesq: Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et la liberté morale, Paris 1879 (Gauthier-Villars).

Sie verstehen, welche Kritik ich an dieser Auffassung üben werde.

Es handelt sich bei Boussinesq überall um Ideen der Präzisionsmathematik (Bestimmtheit einer analytischen Funktion durch ein kleines Stück u.s.w.). Wenn wir uns aber erinnern, daß alle Naturbeobachtungen nur mit beschränkter Genauigkeit möglich sind, so erscheint es als eine durch Nichts bewiesene Annahme zu sagen, daß bei der Natur selbst die obenbesprochenen Beziehungen der Präzisionsmathematik zugrunde liegen. Soll es überhaupt die Präzisionsmathematik sein, so erinnern wir daran,

dass diese auch andere Ideen enthält, z. B. diejenige der unstetigen Funktionen von unstetigen Variablen, die ebenso gut bei der mathematischen Naturdarstellung zur Verwendung kommen könnten. So bewegt sich aber diese ganze Diskussion, bei welcher uns die Beobachtung gar keine Entscheidung liefern kann, von vornherein jenseits der Beobachtung auf mathematischem Gebiet. Hiernach ist die Boussinesq'sche Theorie nicht deshalb mathematisch unsicher, weil sie aus der Voraussetzung heraus, es handle sich in der Natur um analytische Differentialgleichungen, falsche oder unsichere mathematische Folgerungen zöge, sondern weil sie die genannte, unbewiesene Voraussetzung an die Spitze stellt. Wir können zusammenfassend resumieren:

Der schwache Punkt bei allen derartigen Betrachtungen ist der, dass es sich um willkürliche Bevorzugung bestimmter Ideen und Begriffsschilderungen der Präzisionsmathematik handelt, während die Beobachtungen in der Natur immer nur angenäherte Genauigkeit besitzen, die auch in sehr verschiedener Weise auf präzisionsmathematische Dinge bezogen werden können. (Vergl. die Idee der vollständig unstetigen Welt nach Art des Kinematographen).

Überhaupt aber bleibt es fraglich, ob das Wesen einer richtigen Naturerklärung auf präzisions-mathematischer Basis zu suchen ist, ob man je über eine geschickte Verwendung der Approximations-mathematik hinausgelangen kann.

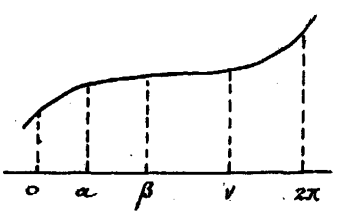
Ich vertrete hier also durchaus einen agnostischen Standpunkt, der aber unangreifbar sein dürfte. —

Wir hatten diese ganze Erörterungen an die Lagrange'sche Interpolationsformel angeknüpft, die uns zum Taylor'schen Lehrsatz und weiterhin zur Taylor'schen Funktion und damit zum Begriff der analytischen Funktion führte. Wir gehen nun zu der

Interpolation durch trigonometrische Reihen

über und betrachten zunächst endliche, dann unendliche Reihen dieser Art.

Wir nennen die unabhängige Variable jetzt ω und nehmen die Funktion periodisch mit der Periode 2π an, d.h. $f(\omega + 2\pi) = f(\omega)$.



Man macht zur approximativen Darstellung einer solchen Funktion gerne den Ansatz durch folgende trigonometrische Reihe:

$$f(\omega) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega + \dots + a_n \cos n\omega + b_1 \sin\omega + \dots + b_n \sin n\omega \Big\} + R = \varphi(\omega) + R,$$

wo der Rest R weggelassen wird, wenn er seinem Betrage nach unbedeutend ist. Die Reihe $\Theta(\omega)$ enthält eine ungerade Anzahl $(2n+1)$ von Konstanten.

Zur Aufstellung der Reihe $\Theta(\omega)$ verfahren wir nun zunächst analog wie bei der parabolischen Interpolation und denken uns also vor allem die $2n+1$ Konstanten durch $2n+1$ Ordinaten $f(\alpha)$, $f(\beta)$ .... der Funktion $f(\omega)$ festgelegt. Es handelt sich dann darum einen Ausdruck $\Theta(\omega)$ aufzustellen, welcher für $\omega = \alpha, \beta \ldots$ die Funktionswerte $f(\alpha)$, $f(\beta)$ ... gibt.

Wir können das gesuchte $\Theta(\omega)$ gleich in einer Gestalt ausschreiben, die der Lagrange'schen Formel analog ist, nämlich:

$$\Theta(\omega) = f(\alpha)\cdot \frac{\sin\frac{\omega-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\omega-\gamma}{2}\ldots\sin\frac{\omega-\nu}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\ldots\sin\frac{\alpha-\nu}{2}} + f(\beta)\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$
$$+ \ldots\ldots + f(\nu)\frac{\sin\frac{\omega-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\omega-\beta}{2}\ldots}{\sin\frac{\nu-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\nu-\beta}{2}\ldots}$$

Im Zähler steht jedesmal eine gerade Anzahl Faktoren, so daß es leicht ist, durch Zusammenfassung je zweier Sinus- eine Summe von Cosinus- und Sinus- der Vielfachen der Winkel herauszubringen, was doch unser ursprünglicher Ansatz war. Wir merken uns:

Der Ausdruck $\Theta(\omega)$ läßt sich ganz nach Analo-

gie des Lagrange'schen Polynoms aufstellen, worauf nur eine formelle Umsetzung nötig ist, um die ursprüngliche Formel:

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega + \ldots + a_n \cos n\omega \\ \quad + b_1 \sin\omega + \ldots + b_n \sin n\omega \end{cases}$$

herauszubringen.

Diese Art der Interpolation wird in der Praxis oft gebraucht; allerdings meist unter der speziellen Annahme, daß alle Ordinaten $f(x) \ldots$ äquidistant sind. Die Berechnung der Reihe $\Theta(\omega)$ ergiebt sich in diesem Falle einfacher durch eine direkte Methode:

Es seien die aequidistanten Punkte

$\alpha_1, \alpha + \frac{2\pi}{2n+1}, \alpha + 2\frac{2\pi}{2n+1}, \ldots$ mit

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bezeichnet.

Die Funktionswerte an diesen Stellen seien

$$A_0, A_1, A_2, \ldots$$

Dann haben wir zur Berechnung der Coefficienten $a_0, a_1, b_1, \ldots$ folgende $2n+1$ lineare Gleichungen:

$$A_0 = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\alpha_0 + \ldots + b_1 \sin\alpha_0 + \ldots + b_n \sin n\alpha_0$$

$$A_1 = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\alpha_1 + \ldots + b_1 \sin\alpha_1 + \ldots + b_n \sin n\alpha_1$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{2n} = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\alpha_{2n} + \ldots + b_1 \sin\alpha_{2n} + \ldots + b_n \sin n\alpha_{2n}.$$

Die Auflösung nach den a und b geschieht nun

einfach, wenn man einmal das ganze System mit $\cos k\alpha_i$, das andere Mal mit $\sin k\alpha_i$ multipliziert und dann addiert. Erinnert man sich noch, daß die $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ sich um den aliquoten Teil $\frac{2\pi}{2n+1}$ unterscheiden, so kommt als Endresultat wobei ich die Details übergehe:

$$\frac{\sum_\nu A_i \cos k\alpha_i = a_k \cdot \frac{2n+1}{2}}{\sum_\nu A_i \sin k\alpha_i = b_k \cdot \frac{2n+1}{2}}.$$

Die so gewonnene Interpolationsformel wird in der Praxis sehr oft benutzt, ebenso wie eine andere, bei der eine gerade Zahl aequidistanter Beobachtungen vorausgesetzt wird.[1] Z. B. sei in der Lehre vom Erdmagnetismus die Aufgabe gestellt, die Abhängigkeit der Deklination auf einem Breitenkreise von der geographischen Länge zu geben. Man beobachtet dann etwa $a = 2n+1$ aequidistanten Punkten die Deklination[2], berechnet die Koeffizienten nach obigen Formeln und erhält so die Funktion durch die geogra-phische Länge als endliche trigonometrische Reihe dar-

---

[1] In der Meteorologie benennt man diese Formeln nach Bessel, siehe dessen Aufsatz in den Astronomischen Nachrichten von 1828: Über die Bestimmung eines Gesetzes einer periodischen Erscheinung.

[2] Oder auch man verschafft sich diese Deklinationen durch vorherige Interpolation aus Beobachtungen an Nachbarorten.

stellt. Dabei ist der Rest als unwichtig vernachlässigt, ob dies gegebenenfalls gerechtfertigt ist, muß der Praktiker beurteilen.

Es ist nun besonders interessant, in der vorstehenden Formel die Stellen, an denen die Ordinaten gegeben sind, unendlich dicht zu wählen. Dann folgt für $\Theta(\omega)$ eine unendliche trigonometrische Reihe

$$\Theta(\omega) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega + \ldots + a_n \cos n\omega + \ldots + b_1 \sin\omega + \ldots + b_n \sin n\omega + \ldots .$$

Wir wollen zusehen, was dabei aus unseren a_k, b_k wird.

Wir bezeichnen den Abstand zweier aufeinanderfolgender Ordinaten $f(\alpha_i)$ und $f(\alpha_{i+1})$, also $\frac{2\pi}{2n+1}$ mit $\Delta\alpha_i$. Dann werden unsere Formeln oben

$$a_k = \frac{1}{\pi} \sum A_i \cos k\alpha_i \cdot \Delta\alpha_i ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \sum A_i \sin k\alpha_i \cdot \Delta\alpha_i ,$$

und, wenn hier n immer größer wird, erhalten wir als Limiten die beiden Integrale:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos k\alpha \, d\alpha ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha .$$

Somit haben wir das Resultat:

Wenn wir zur Grenze ($n = \infty$) übergehen, so erscheint $f(\omega)$ als unendliche Reihe plus einem unbekannten Rest, wobei das Bildungsgesetz der

Koeffizienten folgender ist:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cdot \cos k\alpha \cdot d\alpha$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cdot \sin k\alpha \cdot d\alpha.$$

Die so erhaltene Reihe ist die bekannte Fourier'sche Reihe. Indem wir die Untersuchung des Restes verschieben, können wir das Bisherige so zusammenfassen: Die Approximation von $f(\alpha)$ durch eine unendliche Fourier'sche Reihe ordnet sich als besonderer Fall unter die Approximation durch eine endliche äquidistanten Ordinaten entsprechende trigonometrische Reihe unter. (In der Praxis werden natürlich immer nur endliche Reihen benutzt. Demgegenüber werden in den heutigen mathematischen Lehrbüchern fast nur die unendlichen Reihen behandelt!)

I, 4 Nähere Ausführungen zur trigonometrischen Darstellung der Funktionen.

Mit den vorstehenden Erläuterungen ist noch nichts über das Restglied, also die Konvergenz der Fourier'schen Reihe gesagt, auf das ich sogleich eingehe.

Ich bemerke zunächst, daß sich für das Restglied der endlichen trigonometrischen Reihe, soweit ich sehe, in der Literatur keine bequeme Formel vorfindet[1]. Und doch ist es diese Reihe[2], die in den Anwen-

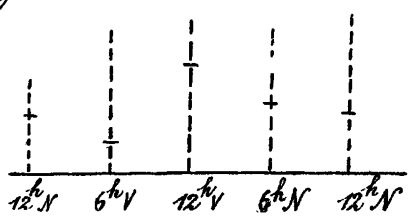
---

1) vergl. den Vorschlag auf pg. 148 (unter der Seite)

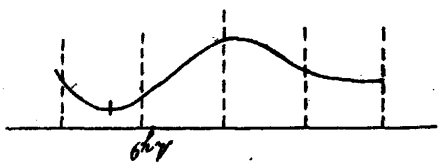
2) bez. die andere, die sich bei Einführung einer geraden Zahl aequidistanter Ordinaten ergiebt.

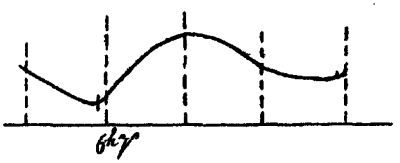
dungen meist gebraucht wird, wenn man es mit periodischen Erscheinungen (die als Funktionen der Zeit dargestellt werden sollen) zu tun hat. Ich nenne hier einige Disziplinen namhaft, die sich dieses Hilfsmittels bedienen: Die Meteorologie (Darstellung des Temperaturwechsels als Funktion der Zeit), Lehre vom Erdmagnetismus (Abhängigkeit der magnetischen Elemente auf einem Breitenkreise von der geographischen Länge) und die Elektrotechnik (Änderung der Intensität der Wechselströme mit der Zeit.) Daß aber auf die Abschätzung der Reste besondere Aufmerksamkeit verwandt werden muß, lehrt ein Resultat, das aus der Praxis der Meteorologie hervorgegangen ist, und das ich hier etwas eingehend schildere, weil es in den ganzen Gedankengang der Vorlesung hineinpaßt.

Wir denken uns die 24 Stunden des Tages als Abszissen auf einer Axe abgetragen und vielleicht für 4 derselben, beispielsweise $12^h N$, $6^h V$, $12^h V$, $6^h N$ die beobachtete Temperatur als Ordinate aufgetragen. Man hat nun versucht, den Verlauf der Temperaturkurve aus diesen 4 Werten mittelst der endlichen trigonometri-



orten Reihe festzulegen. Hierbei hat sich nun (in dem man sich darauf verließ, daß das Restglied als unbedeutend zu vernachlässigen sei) das merkwürdige Resultat ergeben, daß das Minimum der Temperatur mehrere Stunden vor Sonnenaufgang liegt. Dieses Resultat, das in sämtliche Lehrbücher überging und übrigens zu den merkwürdigsten Erklärungen Anlaß gab, erwies sich aber als falsch, seitdem man die selbsttätigen Registrierapparate hat. Diese lassen nämlich erkennen, daß das wahre Minimum unmittelbar vor Sonnenaufgang liegt, indem die Kurve bis zur Ordinate des Sonnenaufgangs (z. B. bei 6^h V) herabsinkt und hier plötzlich wieder stark ansteigt. Diese Bewegung nach unten und das starke Aufsteigen der Kurve treten aber bei den interpolatorischen Daten nicht hervor, so daß die interpolatorische Kurve hierüber naturgemäß keinen Aufschluß gibt. Wie oben hervorgehoben, ist dieser beträchtliche Fehler durch die Vernachlässigung des Restgliedes entstanden!*) Wir kommen





*) Wegen der Litteratur und der Einzelheiten

hiermit also zu folgendem Resultat:

Wieweit man in der Praxis mit derartigen Interpolationsformeln gehen muss, um hinreichende Uebereinstimmung mit den Beobachtungen zu bekommen, muss in jedem einzelnen Falle erfahrungsgemäss kontrolliert werden. Ein Beispiel, dass eine rein formale Interpolation ohne diese Kontrolle zu ganz falschen Angaben führen kann, ist das eben zur Sprache gebrachte Beispiel aus der Meteorologie, das übrigens von den Meteorologen selbst richtig gestellt wurde.

Was nun speziell die „Fourier'sche" Reihe angeht, so ist die Untersuchung über deren Konvergenz und darstellende Kraft seit der klassischen Arbeit von P. L. Dirichlet, J. f. Math. 4 (1829) Gemeingut aller Lehrbücher und Vorlesungen geworden. Man führt die Untersuchung in der Weise, dass man die $(2n+1)$ ersten Glieder der Reihe in die Summe $S_{2n+1}(w)$ zusammennimmt, die sich in folgende Gestalt schreiben lässt:

$$S_{2n+1}(w) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(w+\varphi) \frac{\sin \frac{2\nu+1}{2}}{\sin \frac{1}{2}\varphi} \cdot d\varphi .$$

Nunmehr wird untersucht, welchem Grenzwerte die =

---

siehe den Aufsatz von A. Schmidt: Über die Verwendung trigonometrischer Reihen in der Meteorologie, im Programm des Gymnasium Ernestinum zu Gotha, vom Jahre 1894.

res Integral zustrebt, wenn n unbeschränkt wächst. Es zeigt sich, dass in zahlreichen Fällen in der Tat der Limes die darzustellende Funktion $f(\omega)$ ist. Indem ich die Details der Rechnung übergehe, resumiere ich so:

Man kann die Summe der $(2n+1)$ ersten Terme der Reihe in Form eines Integrals geschlossen darstellen und überzeugt sich, dass dieser Integral für $n = \infty$ jedenfalls dann auf unsere Funktion $f(\omega)$ zustrebt, wenn $f(\omega)$ eine stetige Funktion mit einer endlichen Anzahl von Maximis und Minimis ist (orig. Dirichlet'sche Bedingungen), also um so mehr, wenn nach unserer Ausdrucksweise $f(\omega)$ eine „vernünftige" Funktion ist.

Man kann übrigens die Formel $S_{2n+1}(\omega)$ direkt auch benutzen, um zu sehen, wieweit eine endliche Anzahl von Gliedern der Fourier'schen Reihe eine vorgegebene Funktion $f(\omega)$ approximiert, indem man das Integral

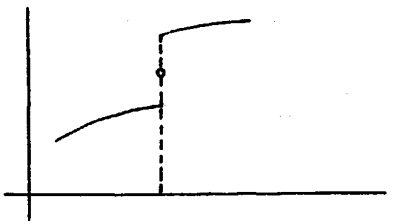
$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega+\varphi)\,\frac{\sin\frac{2\nu+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\,d\varphi.$$

in geeigneter Weise abschätzt.[1]

Ich erinnere hier noch an eine andere Eigenschaft der Fourier'schen Reihe:

---

[1] Dieselbe Methode schlage ich für die endliche Reihe vor, die aequidistante Ordinaten benutzt.



Sie hat die Kraft, auch un-
stetige Funktionen einfacher
Art darzustellen d. h. Funktio-
nen mit einfachen Sprung-
stellen (die übrigens ebenso wie die Maxima und
Minima nur in endlicher Anzahl vorhanden
sein sollen.) An der Sprungstelle selber ist der durch
die Reihe gegebene Funktionswert das arithmeti-
sche Mittel aus den Funktionswerten, die man er-
hält, wenn man sich von links und rechts der Un-
stetigkeitsstelle nähert (oder in Dirichlet'scher
Bezeichnung: $= \frac{f(\omega+0)+f(\omega-0)}{2}$.

Dies sind lauter Dinge, die sich überall in
der Litteratur finden. Ich verweise insbesondere
auf meine Vorlesung über Integralrechnung.

Viel weniger bekannt dagegen ist eine ebenfalls
in dieser Vorlesung erwähnte Eigenschaft der end-
lichen trigonometrischen Reihen, die wohl zuerst
Bessel in seiner zitierten Arbeit von 1828 zur Spra-
che gebracht hat.

Wenn ich die Funktion $f(\omega)$ durch eine endli-
che trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega + \ldots + a_n \cos n\omega$$
$$+ b_1 \sin\omega + \ldots + b_n \sin n\omega$$

darstellen will, so kann ich mir, unbestimmt zu reden, die Aufgabe stellen, die Koeffizienten a_k und b_k so zu bestimmen, dass die Approximation eine „möglichst gute" ist. Es liegt dann nahe, einen Ansatz zu machen, der an die Methode der kleinsten Quadrate anknüpft.

Wir bilden uns die Differenz

$$\left.\begin{aligned} f(\omega) - \frac{a_0}{2} - a_1 \cos\omega - \ldots - a_n \cos n\omega \\ - b_1 \sin\omega - \ldots - b_n \sin n\omega \end{aligned}\right\} = f(\omega) - S(\omega),$$

sehen diese als Fehler der Darstellung an und stellen die Forderung die Summe der Fehlerquadrate, erstreckt über das Intervall 2π, also das Integral:

$$\int_0^{2\pi} (f(\omega) - S(\omega))^2 \cdot d\omega$$

zu einem Minimum zu machen. Durch diesen plausiblen Ansatz finden wir dann das, was wir die „beste" Approximation der Funktion $f(\omega)$ durch eine endliche trigonometrische Reihe nennen werden. Wenn wir das Minimum problem behandeln, so ergeben sich unabhängig davon, wie groß wir n nehmen, genau die Fourier'schen Werte der Koeffizienten a_k und b_k. Man braucht sogar nicht alle Glieder von 1 ... n hinzuschreiben, sondern kann beliebig viele derselben beim Ansatze weg-

lassen; das Resultat ist für die im Ansatz gebrauchten Glieder immer dasselbe.

Ich nehme nur ein Glied mit a_ν heraus und führe hierfür die Rechnung durch. Es läßt sich

$$\int_0^{2\pi} (f(\omega) - a_\nu \cos \nu\omega)^2 d\omega$$

als Funktion von a_ν so ordnen:

$$= \int_0^{2\pi} f(\omega)^2 d\omega - 2a_\nu \int_0^{2\pi} (f(\omega) \cos \nu\omega) d\omega + a_\nu^2 \int_0^{2\pi} (\cos \nu\omega)^2 d\omega.$$

Wir setzen den Differentialquotienten nach a_ν gleich Null und erhalten:

$$0 = -\int_0^{2\pi} (f(\omega) \cos \nu\omega) d\omega + a_\nu \int_0^{2\pi} (\cos \nu\omega)^2 d\omega$$

Das letzte Integral berechnet sich zu:

$$\int_0^{2\pi} (\cos \nu\omega)^2 d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\omega\nu}{2} d\omega = \pi + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\nu\omega}{2} d\omega,$$

so daß wir in der Tat, da das letzte Integral verschwindet, den Fourier'schen Wert

$$a_\nu = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(\omega) \cos \nu\omega \, d\omega$$

erhalten. Die Sache wird nicht geändert, wenn wir mehrere Glieder a_i oder auch b_i nehmen[1], so daß ich mit folgendem Satz abschließe:

<u>Irgend ein endliches Aggregat von Gliedern der endlichen Fourier'schen Reihe ergiebt eine Approximation von $f(\omega)$, welche unter allen Approximationen, die man durch trigonometrische Glieder der</u>

[1] Weil nämlich die Produkte $a_i a_k$ oder $b_i b_k \ldots$ mit Integralen multipliziert auftreten: $\int_0^{2\pi} \cos i\omega \cdot \cos k\omega \, d\omega$, $\int_0^{2\pi} \cos i\omega \sin k\omega \, d\omega \ldots$, die alle Null sind.

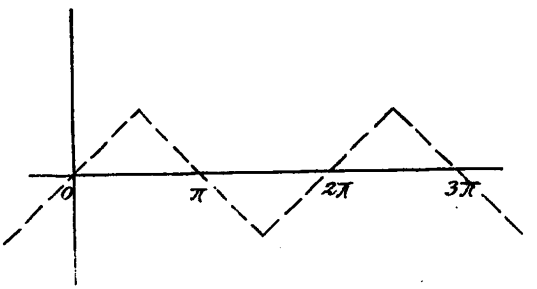
herausgegriffenen Art zu Wege bringt, nach der die Methode der kleinsten Quadrate die beste ist.

Wie sich dies im Einzelnen gestaltet, will ich an einigen Beispielen durchführen. Vorab bemerke ich, daß es zahlreiche Apparate gibt, welche von der Annahme aus, daß die Kurve $y = f(w)$ gezeichnet vorliegt, die mechanische Berechnung einer Anzahl Koeffizienten der Fourierschen Reihe gestatten. Man nennt diese Apparate in Anlehnung an die englische Ausdrucksweise „harmonische Analysatoren". Die Engländer bezeichnen nämlich die Zerlegung einer Funktion in periodische Einzelterme „harmonische Analyse", wobei das Wort harmonisch daran erinnern mag, daß in der Akustik sich zuweilen die Zerlegung von Schwingungen in Einzelschwingungen dieses Charakters aufgedrängt hat. Der Analysator, den ich Ihnen vorführen werde, in der Konstruktion von Corradi (Zürich) nach den Ideen von Henrici (London), gibt je ein a_r und ein b_r für $r = 1, 2 \ldots 6$; was das konstante Glied a_0 angeht, so ist dieses gleich $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(w)\,dw$, also ein in der Ausgangsfigur vorkommender Flächeninhalt, und kann als solcher sofort mit einem Planimeter ausgemessen

tet werden.

Des weiteren werde ich Ihnen nun für zwei bestimmte Beispiele die Annäherung durch abbrechende Fourierʼsche Reihen empirisch in Zeichnung vorführen, um so lieber als man auf diese Weise sofort eine Menge von Einzelheiten begreift, die in der abstrakten Theorie oft unverstanden bleiben.

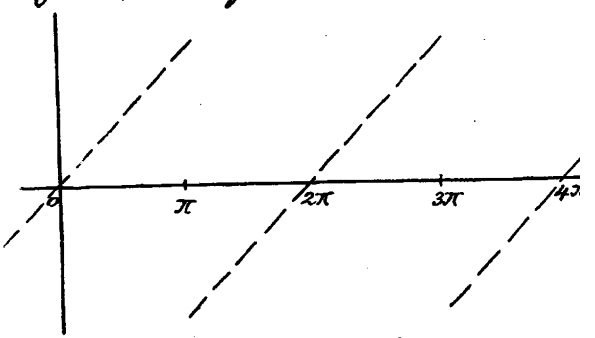
Ich wähle als erstes Beispiel eine Art Kehllenlinie, die durch Gerade gebildet ist, die unter 45° an den Stellen $0, \pi, 2\pi \ldots$ abwechselnd ansteigen und fallen. Man erhält hier folgende Darstellung:



$$f(\omega) = 4/\pi \left(\frac{\sin \omega}{1^2} - \frac{\sin 3\omega}{3^2} + \frac{\sin 5\omega}{5^2} - \ldots \right)$$

(Die Cosinusglieder fallen fort, weil $f(\omega)$ eine ungerade Funktion ist).

Das andere Beispiel gibt uns eine Kurve, die aus lauter geradlinigen Stücken besteht, welche unter 45° ansteigen, und die sich in der Art unstetig aneinander reihen, daß



die Funktion an den Stellen $\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ von dem Werte $+\pi$ nach $-\pi$ springt. Als Darstellungsformel ergiebt sich:

$$f(\omega) = 2\left(\sin\omega - \frac{\sin 2\omega}{2} + \frac{\sin 3\omega}{3} - \frac{\sin 4\omega}{4} \ldots\right),$$

wo wieder die Cosinusglieder weggefallen sind.

Ich gedenke nunmehr das Wesen des erwähnten Analysators durch detaillierte Zeichnungen zu erläutern, damit Sie das Funktionieren desselben verstehen.

Ich schicke folgende Bemerkung voran:

Um die Koeffizienten der Fourier'schen Reihe zu berechnen, haben wir die Integrale

$$a_i = \int_0^{2\pi} \frac{f(x)\cos ix}{\pi}\,dx \quad \text{und} \quad b_i = \int_0^{2\pi} \frac{f(x)\cdot \sin ix}{\pi}\,dx$$

auszuwerten (wo wir $\omega = x$ gesetzt haben und sich die Integrale auf eine Kurve beziehen, die sich irgendwie von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ erstreckt). Natürlich werden wir solche Integrale im Allgemeinen durch die früher erwähnten Methoden der mechanischen Quadratur berechnen können und sind hierauf sogar angewiesen, wenn wir nur eine diskontinuierliche Anzahl von Beobachtungen zur Verfügung haben.[1] Kirsch hat in seinem Buche:

---

[1] Die Fourier'sche Reihe kommt dann gegebenenfalls auf die früher besprochene endliche trigonometrische Reihe mit ihren durch Summen definierten Koeffizienten zurück.

Kirsch: Bewegung der Wärme in den Cylinder„ wandungen der Dampfmaschine, Leipzig 1886 auch graphische Methoden zur annäherungsweisen Be„ rechnung der Koefficienten entwickelt. Liegt dagegen die Kurve gezeichnet vor, so können wir einen konti„ nuierlich arbeitenden Apparat anwenden).

Um zu verstehen, wie speciell unser Apparat ar„ beitet, ist eine Umsetzung der Integrale durch par„ tielle Integration nötig. Wir haben:

$$a_i = \tfrac{1}{\pi}\int y \cos ix\, dx = \tfrac{1}{\pi}\left(\frac{y \sin ix}{i}\right) - \tfrac{1}{\pi}\int \frac{\sin ix}{i}\, dy$$

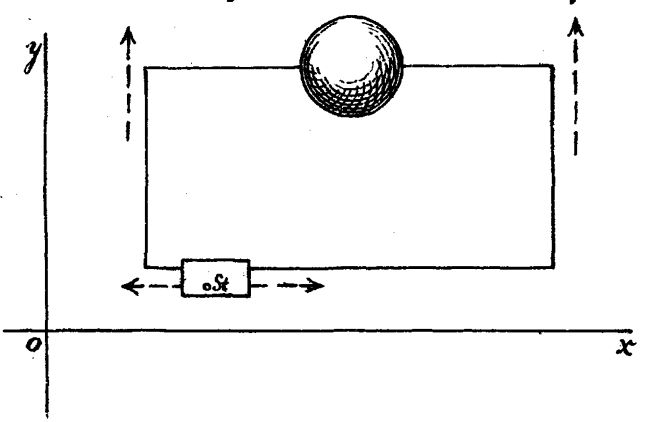
und ähnlich

$$b_i = \tfrac{1}{\pi}\int y \sin ix\, dx = -\tfrac{1}{\pi}\left(\frac{y \cos ix}{i}\right) - \tfrac{1}{\pi}\int \frac{\cos ix}{i}\, dy$$

Nach Einsetzung der Grenzen fallen die ersten Terme rechter Hand fort, so daß die wesentlichen Formeln, an die der Apparat anknüpft, folgende sind:

$\int \sin ix\, dy$ und $\int \cos ix\, dy$ (wo die Integrale immer noch über die Kurve hin zu nehmen sind).

Die Auswertung dieser Integrale bewerkstelligt der Apparat nun so:

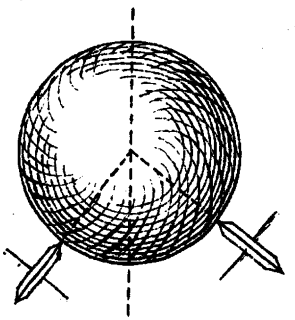


1) Zunächst be„ steht er in der Hauptsache aus einem rechtwinkli„ gen Rahmen, der

infolge geeigneter Rollenführung nur parallel der y – Achse verschiebbar ist.

2/ An dem Rahmen entlang bewegt sich parallel mit der x – Achse ein Schlitten mit Stift, so daß

3/ durch die kombinierte Bewegung des Rahmens und des Schlittens relativ zum Rahmen die Mög. lichkeit gegeben ist, mit dem Stifte eine beliebig gegebene Kurve zu umfahren.



4/ Das wichtigste Organ des Apparates ist nun eine matt geschliffene Glaskugel an der dem Schlitten gegenüberliegenden Seite des Rahmens, die so angebracht ist, daß sie bei der Bewegung des Rahmens (indem sie auf der Unterlage rollt) jeweils eine Drehung um einen Durchmesser parallel der x – Achse erfährt, die mit dy proportional ist.

5/ Pressen wir nun an die Glaskugel unter dem Azimut φ eine Registrierrolle an, so wird diese eine Drehung der Kugel aufnehmen, die mit dy. cos φ proportional ist (der hinzutretende konstante Fak. tor hängt von den Dimensionen des Apparates ab).

Eine ebensolche Rolle, die unter 90° gegen die erste orientiert ist, registriert die Drehung c. dy. sin φ.

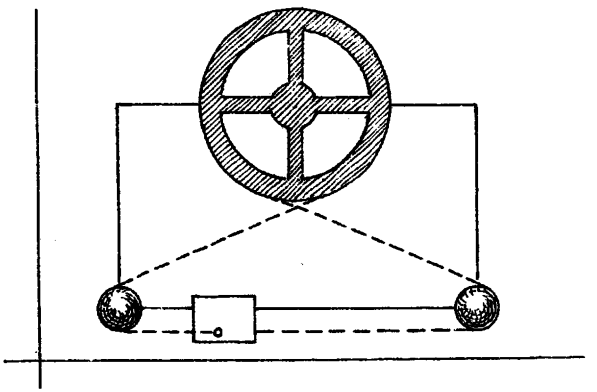
Beide Rollen sind mit Zählwerken versehen, so dass wir sofort

$\int dy \cos\varphi$ und $\int dy \sin\varphi$ ablesen können.

6) Es ist nun ein weiterer wesentlicher Bestandteil am Apparate vorhanden, der dafür sorgt, dass die Azimute der einen oder anderen Registrierrolle gleich ix werden ($i = 1, 2, \ldots 6$ in unserm Apparat), wie es doch nötig ist, um die Integrale:

$\int dy \cos ix$ und $\int dy \sin ix$ zu erhalten.

7) Um dies zu erreichen, wird oberhalb der Glaskugel auf dem Apparate eine Messingscheibe aufgesetzt, die je nach der Zahl i in dem zu berechnenden Integral zweckmässig gewählt werden muss.



Die Befestigung dieser Scheibe ist derart, dass ihre Drehung die beiden Registrierrollen mitnimmt. Diese Drehung ihrerseits wird aber dadurch dem x der Fahrstiftes proportional, dass ein dünner Silberdraht, der an den Fahrstift angeknüpft ist, um die Messingscheibe herumgeführt wird; vergl. die obenstehende Figur.

g) Wähle ich jetzt als Radius der Messingorbeibe der Reihe nach 1, ½ ... ⅙, dann wird die Drehung der Scheibe und damit das Azimut y meiner Registrierrollen der Reihe nach 1.x, 2.x, ... 6x sein und ich werde an beiden Rollen die beiden Integrale, auf die es für i = 1, 2 ... 6 ankommt, mit vorbestimmten Koeffizienten multipliziert, die von den Dimensionen des Apparates abhängen, ablesen können.

Es ist dies also eine äusserst einfache Theorie. Die eigentliche mathematische Erfindung steckt in der Umformung der Integrale durch partielle Integration. Diese so umgeformten Integrale werden dann ganz systematisch am Apparate konstruiert, zuerst dy, dann die Komponenten von ix dy, ein ix dy, wobei die Hauptaufgabe ist, die Azimute der Registrierrollen dem jeweiligen ix gleich zu machen.

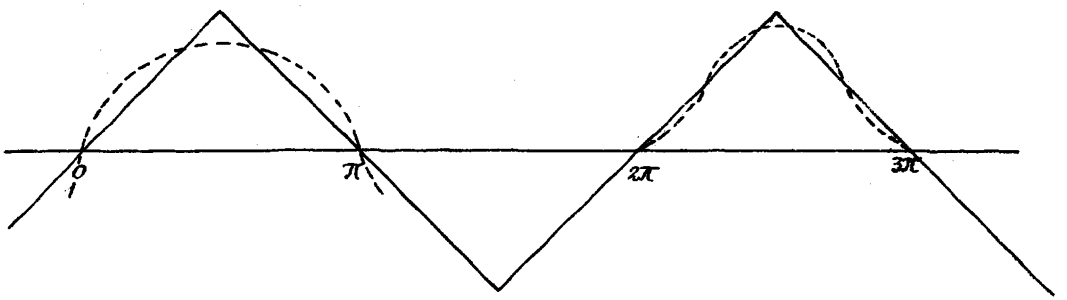
Hierauf lade ich Sie nun ein, den Apparat selbst zu besichtigen, der, wie alle Coradi'schen Apparate, ausgezeichnet schön gearbeitet ist. —

Zweitens gebe ich nunmehr im Anschluß an die vorläufigen Bemerkungen oben die Annäherung der beiden dort angeführten Kurven durch abgebrochene Fourier'sche Reihen.

Es handelte sich erstens um die nachfolgend

gezeichnete Kurve, deren Darstellung

$$y = 4/\pi \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{9} + \dots \right)$$ lautete



Als Annäherungskurven erhalten wir:

$$y_1 = 4/\pi \sin x$$

$$y_2 = 4/\pi \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{9} \right.$$

. . . . . .

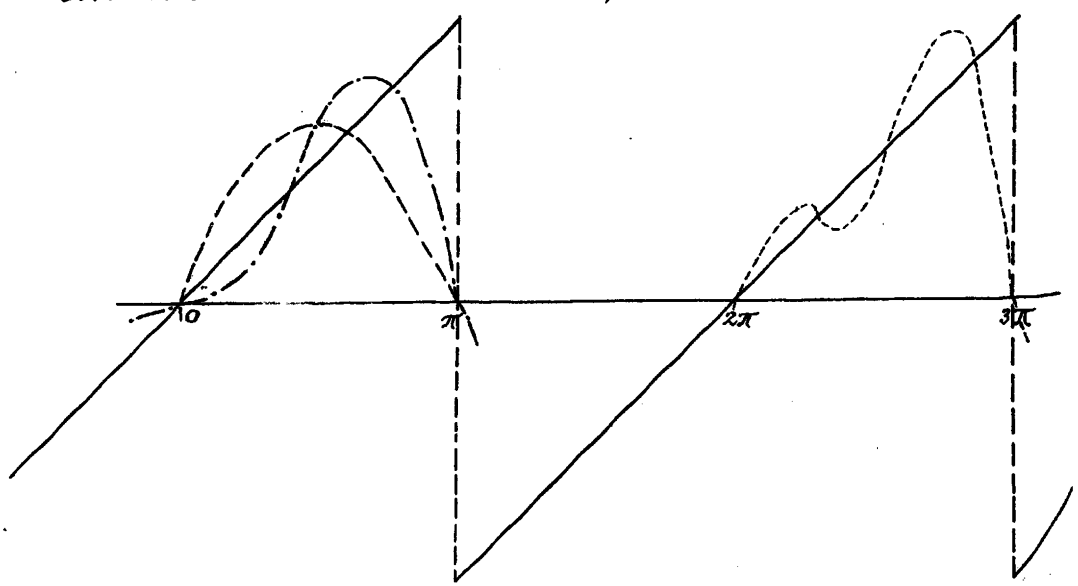
die in der Figur gezeichnet sind. Die Kurve y_1 hat den Typus einer Sinuslinie, die die Kurve in dem Intervall $0 \dots \pi/2$ einmal schneidet und sich nach Möglichkeit dem gezeichneten Dreieck anschmiegt, die zweite Kurve y_2 schneidet die Strecke zwischen 0 und $\pi/2$ zweimal und windet sich relativ zu der darzustellenden Kurve schlangenartig zwischen 0 und π hin und her (In der Figur ist diese 2te Kurve in das Intervall 2π bis 3π verlegt). Ich bemerke hier, wo wir die Sache rein induktiv behandeln, vielleicht folgendes:

Je mehr die Stellenzahl n wächst, um so mehr Schnitte zwischen Annäherungskurve und Original-kurve stellen sich ein und um so enger schmiegt sich nicht nur die Ordinate, sondern auch der Differential-quotient an die Ordinate und den Differential-quotienten der gegebenen Kurve an. Mit dem Differentialquotienten wird es nur möglich an den Knickstellen der Kurve (bezw. deren Nähe); hier hat die Annäherungskurve allemal eine horizontale Tangente.

Die Verhältnisse werden ganz anders, wenn wir unser 2te Beispiel heranziehen. Hier war die Reihendarstellung durch

$$y = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \dots\right) \text{ gegeben}$$

Wir zeichnen auch hier die Annäherungskurven ein und bemerken zunächst, in Übereinstim-



mung mit dem Vorigen, daß auch hier die Zahl der Schnittpunkte der Original- und Annäherungskurve, je weiter wir gehen, immer größer wird. Die erste und zweite Annäherungskurve sind in dem Intervall von 0 bis π, die dritte in dem Intervall 2π bis 3π eingezeichnet.

Wie steht es aber mit der Annäherung der Ordinaten selbst?

Wir kommen hiermit zu einem feinen Punkt, der weiterverfolgt zur sogenannten „ungleichmäßigen Konvergenz" der Fourier'schen Reihe in der Nähe der Sprungstellen der darzustellenden Funktion führt. Die Sache ist folgende:

An einem beliebigen Punkt, bei π/2 z.B., wird die Annäherung der Ordinate mit jeder folgenden Annäherungskurve besser. Wenn ich aber in die Nähe der Unstetigkeitsstelle gehe, so hat hier die Originalkurve nahezu die Ordinate π, die Annäherungskurve aber eine weitaus kleinere Ordinate, und prinzipiell nicht besser wird es bei den folgenden Annäherungskurven. Wir haben hier das Mißverhältnis, daß von der einzelnen Annäherungskurve die Ordinaten gar nicht approximiert werden, (sofern wir bei festgehaltenem

Index der Annäherungskurve nur nahe genug an die Unstetigkeitsstelle herangehen). Wenn ich die, es in Form einer allgemeinen Sentenz fassen darf, die natürlich an sich keine Beweiskraft hat, die Sache aber verständlich macht, so heißt es:

Für jeden bestimmten Wert $x = x_0$ können wir in der Gliederzahl der Reihe soweitgehen, daß die Ordinate der Näherungskurve mit der Ordinate der Originalkurve „befriedigend" übereinstimmt. Je näher aber das x_0 an der Unstetigkeitsstelle liegt, um so größer muß man das n nehmen, damit die gewollte befriedigende Übereinstimmung eintritt, und weiter, wenn nur jemand die n^te Näherungskurve gibt, dann können wir mit dem x_0 so nahe an die Unstetigkeitsstelle herangehen, daß mit diesem gegebenen n noch keine befriedigende Übereinstimmung erzielt wird.

Was das Beispiel induktiv erläutert, faßt man theoretisch so:

Die unendliche Fourier'sche Reihe konvergiert zwar für alle Werte x, aber die Konvergenz erscheint bei Annäherung an die Unstetigkeitsstelle der Funktion unbeschränkt verlangsamt.

Man kann nun meinen, daß dann die Reihe an

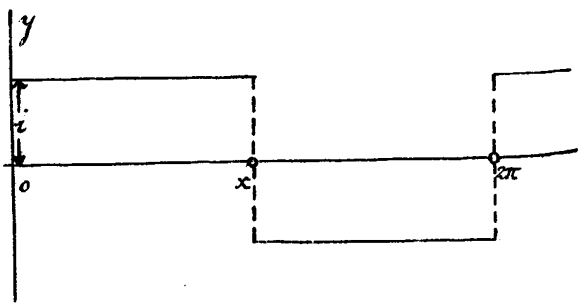
der Unstetigkeitsstelle ganz schlecht d. h. gar nicht konvergiert. Es ist aber gerade das Gegenteil der Fall. Denn der Mittelwert $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, um den es sich handelt, ist gleich Null und diesen Wert ergiebt bereits die erste Annäherungskurve. Man kommt zu der bezeichneten irrigen Meinung, weil man sich unwillkürlich den Grad der Konvergenz gemäss elementarer Gewöhnung als stetige Funktion von x denkt, was er aber in Wirklichkeit eben nicht ist. Man nennt die hier auftretende Erscheinung der bei Annäherung an eine Stelle unbegrenzt verlangsamten Konvergenz „die ungleichmässige Konvergenz" der Reihe und diese klar gemacht zu haben, ist ein Hauptverdienst der hier von mir gegebenen Erläuterungen. Zusammenfassend wiederhole ich so:

Die unendliche Fourier'sche Reihe konvergiert für jedes x und insbesondere so gut wie möglich an der Unstetigkeitsstelle selbst, aber der Grad der Konvergenz wird schlechter und schlechter, je mehr ich mich in die Nähe der Unstetigkeitsstelle begebe, und ich kann mich so nahe an die Unstetigkeitsstelle begeben, dass die Konvergenz noch schlechter ist, als irgend ein vorgelegtes endliches Maass der Schlechtigkeit.

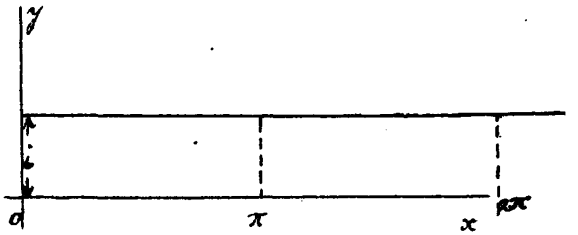
Was nun die Approximation der Richtung durch die Annäherungskurven betrifft, so habe ich bereits in Bezug auf unsere erste Kurve gesagt, daß bei ihr die Richtung allerdings durch die successiven Näherungskurven approximiert wird (mit alleiniger Ausnahme der Scheitelpunkte). Dagegen wird, wie aus der Figur schon hervorgeht (cf. oben), im 2ten Beispiele zwar der Verlauf der Ordinaten, aber nicht der Verlauf der Richtung approximiert. Die Relativoszillationen zwischen Annäherungskurve und Originalkurve werden im Gegenteil bei wachsendem m immer steiler. Ein ähnliches Verhalten der Annäherungskurven tritt allemal ein, wenn es sich um eine Originalkurve mit Unstetigkeitsstellen handelt.

Den Grund hierfür können wir für unser Beispiel leicht folgendermaßen einsehen.

Bei unserer ersten Kurve können wir leicht die Differentialkurve zeichnen; sie wird fortgesetzt aus Stücken mit den Ordinaten +1 und −1 bestehen, die in den Intervallen $\overline{0\pi}$, $\overline{\pi 2\pi}$ ... abwechseln.



In unserem 2ten Beispiel wird die Sache schwieriger.



Hier erhalten wir nämlich im allgemeinen $y' = +1$, nur an den Sprungstellen der Kurve wird der Differentialquotient unendlich groß.

Sehen wir uns nun diese Kurven an, so finden wir, daß in unserm ersten Falle die Differentialkurve selbst wieder durch eine Fourier'sche Reihe

$$y' = \frac{4}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots\right)$$

darstellbar ist, wobei an den Sprungstellen der Funktion die Mittelwerte dargestellt werden. Und wie aus dem Vergleich mit der Fourier'schen Reihe für die Originalkurve

$$y = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots\right)$$

hervorgeht, kann diese geradezu durch gliedweise Differentiation der letzteren erhalten werden. Demnach ist ganz klar, daß unsere successiven Näherungskurven nicht nur die Ordinaten, sondern auch die Richtung der Originalkurve approximieren (immer mit Ausnahme der Sprungstelle).

Ganz anders ist die Sache bei unserm 2. Beispiel. Hier ist erstens die Differentialkurve gar nicht durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar und zweitens, wollten wir durch gliedweise Differentiation der Origi-

nalreihe

$$y = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \dots\right)$$

die Reihe

$$? = 2(\cos x - \cos 2x + \dots)$$

ableiten, so konvergiert diese gar nicht, so daß wir uns schon darum nicht wundern können, wenn die Annäherungskurven den Differentialquotienten nicht approximieren. Und so wie in unserm Beispiel ist es immer, wenn man in Fourier'schen Reihen Funktionen darstellt, die Sprungstellen haben, und dann die Ableitungen dieser Funktionen in Betracht zieht.

Dies ist das Wenige, was ich in diesem Zusammenhange über die Fourier'schen Reihen sagen wollte. Zum Schlusse dieses ganzen Kapitels über Interpolation und Approximation von Funktionen einer Variablen will ich noch besonders auf die Arbeiten von P. L. Tschebyscheff, des hervorragenden russischen Mathematikers, hinweisen.

Tschebyscheff hat sein ganzes Leben hindurch immer wieder die Frage der annäherungsweisen Darstellung von Funktionen durch analytische Ausdrücke einfacher Bauart behandelt; er ist Approximationsmathematiker par excellence gewesen. Bis

lang waren seine Arbeiten sehr schwer zugänglich, da sie größtenteils in russischer Sprache verfaßt und in russischen Zeitschriften erschienen sind. Seit 1899 aber liegt der erste Band der gesammelten Werke in französischer Übersetzung, von Markoff und Sonin herausgegeben, vor. Dieser Band enthält die mannigfaltigen Aufsätze zur Interpolationslehre, und ich hebe hier besonders folgende 3 Abhandlungen hervor:

1) Sur les fractions continues, J. de math. (2) 3 (1858) = Werke 1, p. 201 ff.

2) Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro.

3) Sur le développement des fonctions d'une variable, Petersburg, Bulletin de l'Acad. 1859 = Werke 1, p. 499 ff.

Im übrigen will ich zur Charakterisierung der Tschebyscheff'schen Arbeiten folgendes erwähnen:

Wir hatten bereits in unserer eigenen Darstellung der Approximation zwei Fragestellungen sich durchkreuzen sehen.

Das eine Mal gaben wir für eine Kurve eine Anzahl von Ordinaten und verlangten einen einfachen Ausdruck, der an den gegebenen Stellen die

selben Ordinaten hat. Das andere Mal erhalten wir die Ideen der Methode der kleinsten Quadrate heran.

Man kann nun diese Ideen verbinden, in dem man folgendermassen verfährt:

Wir wollen eine Kurve durch ein Polynom n^ter Grades darstellen

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^n,$$

in dem (n+1) Konstante vorkommen. Sind uns nun nur (n+1) Beobachtungen (Ordinaten) gegeben, so fallen wir natürlich auf die Lagrange'sche Interpolationsformel zurück. Haben wir aber mehr als (n+1) Beobachtungen, so ist Gelegenheit, die Ideen der Methode der kleinsten Quadrate mit heranzubringen, indem man nämlich verlangt, dass die Summe der Fehlerquadrate bei der Legung der Parabel n^ter Ordnung ein Maximum wird. Diese Aufgabe ist nach einer Verallgemeinerung fähig, wenn die verschiedenen Beobachtungen ein verschiedenes Gewicht haben, sodass man die Summe aus (Fehler)^2 × (Gewicht) zu einem Minimum zu machen sucht. Hierfür hat Tschebicheff nun abschliessende Formeln mit Hülfe eines Kettenbruchentwicklung gegeben, so dass ich vielleicht so kurz seine Leistung charakterisiere:

Eine erste Serie seiner Arbeiten bezieht sich darauf, dass mehr Beobachtungen gegeben sind, als unbekannte, zu benützende Koeffizienten in der Interpolationsformel vorkommen, und dass man nun diese Koeffizienten aus der Forderung bestimmt, die Summe der mit geeignetem Gewicht multiplizierten Fehlerquadrate soll ein Minimum werden.

Tschebycheff war aber nicht im einseitigen Glauben an die Methode der kleinsten Quadrate befangen, so dass er in andern Arbeiten es erreicht, dass nicht die Summe der Fehlerquadrate, sondern der absolute Betrag des grössten vorkommenden Fehlers zu einem Minimum gemacht wird. Dies geschieht in der wunderbaren Arbeit, die den Titel führt:

Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible du zéro.

Sie werden gleich sehen, wie das gemeint ist. Es sei ein Polynom n^{ter} Grades mit dem höchsten Gliede x^n gegeben; die Aufgabe ist, die Koeffizienten der andern Glieder so zu bestimmen, dass zwischen $+1$ und -1 möglichst geringe Abweichungen von Null vorkommen. Tschebycheff bekommt auch

hier eine sehr einfache Schlussformel.

Und nun noch eine 3te Art von Untersuchungen.

Sie beziehen sich darauf, dass die sämtlichen Ordinaten einer Kurve als gegeben angesehen werden, aber mit einem von der Abszissenachse x abhängigem Gewichte, dass man nun Reihenentwickelungen sucht, welche eine so gegebene Kurve nach den Grundsätzen der Methode der kleinsten Quadrate möglichst gut approximieren, wobei sich ziemlich alle in praxi gebrauchten Reihen je nach der Art der Gewichtsverteilung auf die verschiedenen Beobachtungen ergeben. Als praktisches Beispiel hat Tschebycheff u.a. die Frage der Geradführung durch Kurbelgetriebe (das Gesetz des Kurbelgetriebes ist die darstellende Funktion) herangezogen. —

Ich habe diese Arbeiten von Tschebycheff über Interpolation hier erwähnt, erstens weil sie an sich sehr wertvoll sind und zweitens weil sie in Deutschland immer noch zu wenig bekannt sind. Auch das Referat über Interpolation von J. Bauschinger in dem eben erschienenen 6. Hefte des 1. Bandes der mathematischen Encyklopädie, dessen Lektüre ich übrigens Jedermann, der mit Interpola-

tion zu tun hat, lebhaft empfehlen will, enthält keine reichte Würdigung der Pockelsschen Arbeiten. Es erscheint erwünscht, dass einmal ein zusammengefasster Bericht dem deutschen mathematischen Publikum vorgelegt wird.

I, 5 Funktionen zweier Veränderlicher.

Ein kurzer Rückblick auf den bisherigen Aufbau der Vorlesung zeigt uns, dass wir sowohl bei der Behandlung der Variablen x, als auch der Funktionen f(x) einer Veränderlichen stets den Gegensatz zwischen Approximations- und Präzisionsmathematik zu betonen hatten. An erstere schliessen sich dann die verschiedenen praktischen Vermessungen der Mathematik an. Dabei lag die Geometrie gewissermassen in der Mitte. Wir gebrauchen die Geometrie hier vorwiegend zur leichteren Erfassung abstrakter Betrachtungen. Und da liegt die Sache folgendermassen: Soweit wir von Kurven handeln, die wir zeichnen und uns konkret vorstellen, erläutern wir zunächst Beziehungen der Approximationsmathematik, andererseits aber ist die geometrische Vorstellung geeignet auf das Ideal hinzuweisen und dadurch indirekt seine Bedeutung verständlich zu machen, wie wir uns z. B.

die Weierstraß'sche Funktion klar machten, indem wir die successiven Näherungskurven in Betracht zogen[1]). —

Genau so stellt sich nun die Sache, wenn wir jetzt zu

Funktionen zweier Veränderlicher ($z = f(x, y)$)

übergehen. Wir beginnen auch hier mit Erläuterungen, die dem Gebiete der Präzisionsmathematik angehören, wobei mein Ziel ist, gewisse fundamentale Beziehungen durch konstruktive geometrische Figuren deutlicher zu machen, als durch die gewöhnliche abstrakte Darstellung geschieht.

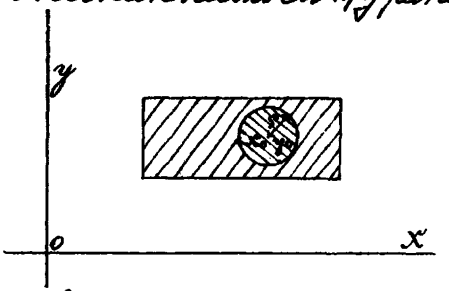
Zunächst etwas über den Bereich der Variablen x, y.

Mit den Fragen: was ist der allgemeinste Bereich x, y, wann ist er ein Kontinuum u. s. w.? kämen wir tief in das Gebiet der Mengenlehre hinein. Ich gehe hierauf nicht ein, sondern verweise auf die schon zitierten Referate von A. Pringsheim und A. Voss in der Encyklopädie, bezw. A. Schönflies in Bd. 8 der Berichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung.

---

[1]) Schließlich könnte man wohl alle Gebiete der Anwendungen in demselben Sinne benutzen, wie es hier mit der Geometrie geschieht; wir wollen uns hier in solche Spekulationen nicht zu sehr vertiefen.

Unser Bereich sei der Einfachheit halber ein Recht„ eck, dessen Seiten den Koordinatenachsen x, y parallel gewählt sind; für diesen Bereich sei unsere Funk„ tion definiert.



Was damit begrifflich gemeint ist, ist wohl ohne nähere Erläuterung klar. Es soll zunächst nur fest„ gesetzt sein, dass zu jedem Wertsystem (x, y) des Be„ reiches ein bestimmter Wert der z zugehört.

Wann werde ich nun $f(x; y)$ an einer Stelle $x_0\ y_0$ stetig nennen?

Folgende Definition wird sofort Ihren Beifall haben:

Wir betrachten die Differenz

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$$

und nennen eine Funktion $f(x\,y)$ im Punkte $x_0\ y_0$ stetig, wenn sich für ein noch so kleines gegebenes δ ein von Null verschiedenes ρ derart finden lässt, dass für alle x, y, bei denen $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \rho^2$ ist, auch

$$|f(x\,y) - f(x_0\ y_0)| < \delta$$

wird. (Der Kreis mit dem Radius ρ um $x_0\ y_0$ ist von uns natürlich nur der Einfachheit hal„

ber gewählt; das Wesentliche ist, daß wir für noch so kleines δ um $x_0\ y_0$ herum einen (endlichen) Bereich abgrenzen können, innerhalb dessen die Schwankung $|f(x\,y) - f(x_0\,y_0)| < \delta$ bleibt).

Diese abstrakte Definition der Stetigkeit hat, wie Sie sehen, noch keine Schwierigkeit. Wir kommen aber schon auf kompliziertere Verhältnisse, wenn wir ganz einfache analytische Ausdrücke betrachten.

Z. B. betrachten wir die rationale quadratische Funktion

$$z = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Dieselbe gibt uns bei der geometrischen Interpretation eine Linienfläche 3ten Grades, die in der Mechanik den Namen „Cylindroid" führt. Um ihren Verlauf zu diskutieren, setzen wir

$x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$. Es kommt

$$z = \sin 2\varphi.$$

Die Fläche besteht demnach nach dem Gesetz $z = \sin 2\varphi$ aus lauter horizontalen Geraden (r fällt aus der Formel heraus), die die z-Achse schneiden. Die Frage ist: Welchen Wert hat die Ordinate z bei $x = 0$, $y = 0$?

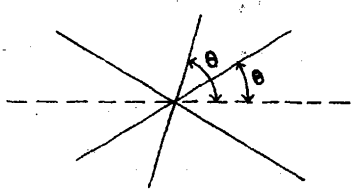
Das Modell (vgl. die Abbildung in Sir R. S. Ball:

Treatise of the theory of screws, Cambridge 1900) zeigt schon, daß hier gar kein bestimmter Wert festgelegt ist. Unser Ausdruck nähert sich für $x=0$, $y=0$ nur dann einem bestimmten Werte, wenn man angiebt, auf welchem Wege ich zum Punkte $x=0$, $y=0$ zuschreiten soll. Man bezeichnet diese Eigenschaft des Ausdrucks als eine Stetig-Vieldeutigkeit; wir werden sagen:

Schon bei den rationalen Ausdrücken zweier Veränderlicher tritt diese Stetig-Vieldeutigkeit auf, welche durch unsere begriffliche Festlegung des Funktions-begriffes zunächst ausgeschlossen ist.

Im Anschluß an diese erste Schwierigkeit, die bei den Funktionen zweier Variabler auftreten kann, will ich gleich noch eine zweite erläutern:

Es sei $f(x\,y)$ für ein Wertesystem $x_0\,y_0$ definiert, sie möge ferner stetig sein für jedes θ, und θ, längs dessen wir auf den Punkt $x_0\,y_0$ zuschreiten mögen. Die Frage ist: Ist $f(x\,y)$ dann für x_0, y_0 im Sinne unserer vorausgeschickten allgemeinen Definition stetig?



($f(x\,y)$ stetig für $x_0\,y_0$, wenn $|f(x\,y) - f(x_0\,y_0)| < \delta$

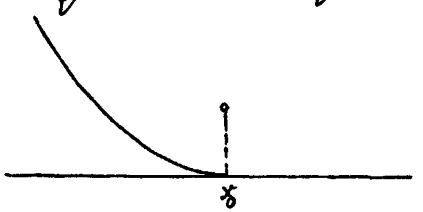
für $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\rho^2$). Oder in Formeln geschrieben:

Kann man aus $|f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)-f(x_0,y_0)|<\delta$ für $r<\rho_\theta$ (ρ von θ abhängig) auf Stetigkeit schleichtweg schließen?

Es ergiebt sich, daß dies nicht der Fall zu sein braucht, so daß eine Funktion, die für jede Fortschreitungsrichtung von x_0, y_0 aus stetig ist, noch nicht schleichtweg stetig zu sein braucht.

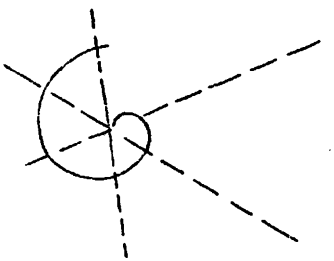
Um dies zu erläutern, komme ich zuerst auf das zurück, was wir bei der ungleichmäßigen Konvergenz der Fourier'schen Reihe lernten. (Vgl. auch die früheren Erläuterungen über gleichmäßige Stetigkeit pg. 69).

Die ungleichmäßige Konvergenz der Fourier'schen Reihe (d.h. die unendlich verlangsamte Konvergenz) an einer Stelle x_0 können wir uns in einer Kurve oder in einem gebrochenen Linienzug in der Weise versinnlichen, daß wir für jeden Wert von α den Quotienten $\frac{1}{n}$ (n = Gliederzahl für bestimmten Annäherungsgrad) als Ordinate auftragen. Es wird dann die Kurve beständig nach der Stelle x_0



hin fallen, hier aber selbst einen von Null verschiedenen Wert annehmen (also unstetig durch Sprung sein). Trotzdem die Konvergenz bei Annäherung an die Stelle x_0 unendlich verlangsamt wird, herrscht an allen Stellen Konvergenz!

Ähnliches haben wir hier bei der <u>azimutalen Stetigkeit</u>.



Wir denken uns auf jeder Richtung θ ρ_θ als Radiusvektor aufgetragen, so daß wir eine Kurve erhalten, die uns das Maß der „azimutalen" Stetigkeit gibt. Es ist nun möglich, daß bei dieser Kurve allerdings für jedes θ ein endliches ρ existiert, daß aber ρ_θ trotzdem bei wechselndem θ jeden festen Wert ρ_0 unterschreitet. Es ist dies dann der Fall, wenn sich die Kurve bei Annäherung bestimmter Azimute beliebig nahe an den Punkt $x_0\, y_0$ heranzieht, um dann für die betreffenden Azimute selbst wieder in endliche Entfernung zu rücken. Ich fasse noch einmal zusammen:

Findet bloß azimutale Stetigkeit statt, so ist nicht ausgeschlossen, daß ρ_θ bei Annäherung an ein

zelne Werte von 0 der Null beliebig nahe kommt, wenn es nur für die betreffenden Werte 0 selbst wie der einen endlichen Betrag annimmt.

Für einen solchen Fall wird man nun ersichtlich um x_0, y_0 herum unmöglich einen Kreis mit einem festen Radius ρ so beschreiben können, daß für alle Punkte im Innern des Kreises die Schwankung der Funktion unter ε bleibt.

Es ist also arimudale Stetigkeit noch nicht dasselbe wie Stetigkeit schlechtweg. Damit die arimudale Stetigkeit, Stetigkeit schlechtweg wird, müssen wir ausdrücklich verlangen, daß es sich um gleichmässige arimudale Stetigkeit handelt (d.h. eben, daß die Angabe eines endlichen ρ möglich ist).

Hiermit dürfte dieser immerhin feine Punkt erledigt sein; ich bitte Sie, sich selbst Beispiele zu bilden, wo zwar arimudale Stetigkeit statthat, aber nicht Stetigkeit schlechtweg. —

Bei den schlechtweg stetigen Funktionen haben wir nun analog den Sätzen bei einer Funktion einer Variablen den Satz von der Existenz der Maxima und Minima und dem kontinuierlichem Durchlaufen aller Zwischenwerte, wie Sie ebenfalls selbst überlegen wollen. —

Die nächstliegenden Fragen sind nun:
Wann ist eine stetige Funktion $f(x\,y)$ differenzierbar, unbeschränkt differentiierbar und in eine Taylor'sche Reihe entwickelbar?

Hier haben wir zunächst von den ersten partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q$$

einer Funktion zu reden.

Diese brauchen natürlich nicht zu existieren; wir postulieren vielmehr ihre Existenz und fragen dann nach den höheren Differentialquotienten. Zunächst die 2 ter Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t$$

Hier müssen wir sagen:

Soll eine stetige Funktion $f(x\,y)$ an irgend einer Stelle nicht nur die ersten Differentialquotienten, sondern auch die zweiten und die folgenden höheren Differentialquotienten haben, dann muß man nicht nur deren Existenz ausdrücklich postulieren, sondern auch besonders untersuchen, ob die Differentiation unabhängig von der Reihenfolge ist d. h. ob z. B. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ist.

Auf die letztere Frage gehe ich weiter unten ein.

Vorab nehmen wir die Existenz aller Differential„quotienten und auch die durchgängige Vertauschbarkeit der Differentiationen an und fragen:

Ist $f(x,y)$ dann in die Taylor'sche Reihe

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)p_0 + (y-y_0)q_0}{1!} + \frac{(x-x_0)^2 r_0 + 2(x-x_0)(y-y_0)s_0 + (y-y_0)^2 t_0}{2!} + \ldots$$

entwickelbar? $\left(s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$

Wir müssen hier nach unsern früheren Bemerkungen die Antwort geben:

Damit die Taylor'sche Reihe gilt, genügt keineswegs die Existenz der Differentialquotienten und die Konvergenz der formal aufgestellten Reihe, sondern es treten sozusagen Pringsheim'sche Bedingungen dazu, was darauf hinauskommt, dass das Restglied bei wachsendem n der Null beliebig nahe kommen soll. Nur wenn dies Alles zutrifft, nennen wir $f(x,y)$, zunächst im Konvergenzbereich der Reihe, eine analytische Funktion der beiden Variablen x, y.

Und wir mögen hinzufügen: Solcherweise muss also eine grosse Anzahl von Voraussetzungen zusammenkommen, damit $f(x,y)$ eine analytische Funktion ist.

Wir werfen jetzt einen kurzen Blick auf die An-

wendungen und fragen: Wie steht es mit den in der Mechanik und Physik gebrauchten Funktionen von zwei oder mehreren Variablen?

Die übliche Ausdrucksweise in den Anwendungen ist die, daß man jede Funktion als analytisch ansieht und sich dann berechtigt glaubt, die Reihe bei den Gliedern erster, zweiter oder dritter Dimensionen abzubrechen, „weil dies eine genügende Annäherung gibt."

Demgegenüber hat unsere Kritik einzusetzen. Ganz gewiß denkt man bei einer solchen Ausdrucksweise nicht an den gerade auseinandergesetzten exakten Begriff der analytischen Funktion. Man bewegt sich vielmehr von vornherein auf dem approximativen Gebiet und nimmt kurzweg an, daß die vorkommenden Abhängigkeiten mit hinreichender Annäherung durch Polynome erster, zweiter, dritter Dimension darstellbar seien. Es liegt also das Hauptgewicht bei der üblichen Ausdrucksweise auf dem Tatsächlichen: Die Annahme ist, daß die in den Anwendungen vorkommenden Funktionen mit genügender Annäherung durch Polynome ersten, 2ten, 3ten Grades dargestellt werden können. Daß es sich „in Wirk-

lichkeit" um analytische Funktionen handele, ist für die kritische Auffassung, die ich hier vertrete, nicht zuzugeben; wir haben kein Mittel, es zu konstatieren.

Die Frage ist nun: Kommen tatsächlich in den Anwendungen nur Abhängigkeiten vor, bei denen die genannte Approximation statthaft ist; ist in Sonderheit in der Praxis (bei Zugrundelegung der Bedeutung, welche die Differentialquotienten überhaupt für die Praxis haben) stets $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$? Oder ist die ganze Annahme nur eine konventionelle, uns nur durch Gewöhnung geläufige?

Wir müssen hier sagen:

Es gibt in der Praxis Beispiele genug, bei denen es nicht gestattet ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ zu setzen.

Um dies klar zu machen, fragen wir vorab:

Unter welchen Voraussetzungen beweist man innerhalb der Präzisions-mathematik, daß $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ist? Nachher machen wir uns dann Beispiele, bei denen diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind, indem wir unter den Flächen Umschau halten, die uns die Praxis vorführt.

Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ folgendermaßen definiert:

Zunächst ist

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k=0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k} = q(x,y)$$

und

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{h=0} \frac{q(x+h,y) - q(x,y)}{h}$$

Vereinigen wir beide Gleichungen, so kommt:

$$s' = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{h=0} \left(\lim_{k=0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y)}{hk} \right)$$

also:

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ erwächst aus dem rechter Hand stehendem Bruche, wenn wir zuerst zur Grenze $k=0$ und dann erst zur Grenze $h=0$ übergehen.

Aehnlich haben wir:

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{k=0} \left(\lim_{h=0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y)}{hk} \right),$$

sodass wir uns den begrifflichen Unterschied in dem Satze klar machen:

Wir bekommen den anderen Differentialquotienten $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, wenn wir die nämlichen beiden Grenzübergänge in der umgekehrten Reihenfolge machen, wenn wir zuerst $\lim_{k=0}$ und dann $\lim_{h=0}$ ausführen.

Es kommt also die Gleichheit der beiden Differentialquotienten auf die Frage hinaus, ob die beiden Grenzübergänge, die wir zu machen haben, vertauschbar sind oder nicht.

Wir werden jetzt mit Hülfe des Rolle'schen Satzes den gewöhnlichen Fall herausarbeiten, wo wirklich

$s = s'$ ist.

Es ist

$$p(x,y) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

Nach dem Rolle'schen Satze gilt, unter der Voraussetzung, dass p existiert und in Bezug auf x stetig ist, die Beziehung:

$$f(x+h,y) - f(x,y) = h \cdot p(x+\vartheta h, y) \quad (0 < \vartheta < 1)$$

Jetzt nehmen wir p differentiierbar und den entstehenden Differentialquotienten s in Bezug auf y im Intervall $y \ldots y+k$ stetig an, so können wir abermals den Rolle'schen Satz anwenden und haben:

$$p(x+\vartheta h, y+k) - p(x+\vartheta h, y) = k \cdot s(x+\vartheta h, y+\eta k) \quad (0 < \eta < 1)$$

oder zusammenfassend:

$$1)\ f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+h,y) + f(x,y) = h \cdot k \cdot s(x+\vartheta h, y+\eta k).$$

Ganz ebenso folgt unter entsprechenden Voraussetzungen:

$$f(x,y+k) - f(x,y) = k f(x, y+\eta' k)$$

$$q(x+h, y+\eta' k) - q(x, y+\eta' k) = h \cdot s'(x+\vartheta' h, y+\eta' k)$$

also

$$2)\ f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y) = hk \cdot s'(x+\vartheta' h, y+\eta' k)$$

Mithin aus 1) und 2)

$$s(x+\vartheta h, y+\eta k) = s'(x+\vartheta' h, y+\eta' k)$$

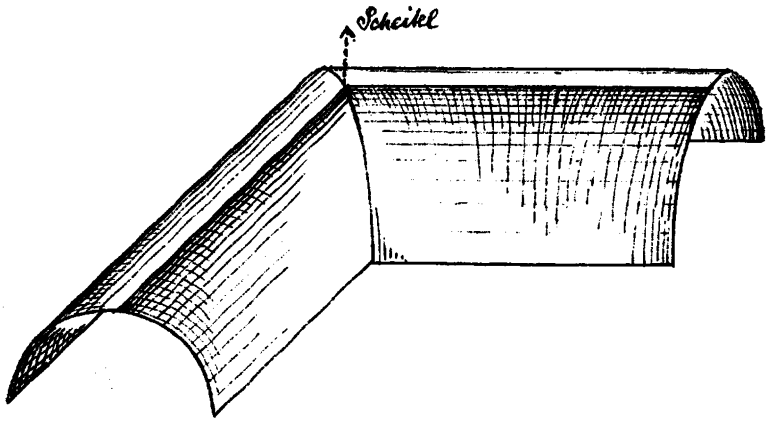
Nehmen wir nun an, dass s und s' für klei-

nur werden k und h beide stetig in ihren Wert $s(xy)$ resp. $s'(xy)$ übergehen, so folgt $s = s'$, was wir beweisen wollten.

Es ergiebt sich also, daß wir zum Beweise der Gleichheit von $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nicht nur die Existenz, sondern auch die Stetigkeit von p, q, s und s' vor„ aussetzen mußten. Soll also s von s' verschieden sein, während wir an der Existenz von s und s' festhal„ ten, so müssen wir von den genannten Stetigkeits„ voraussetzungen etwas fallen lassen.

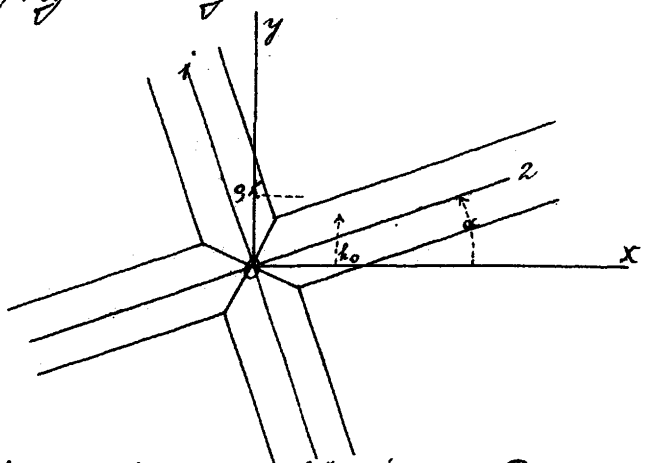
Wir wollen nun sehen, daß in der Tat bei den Flächen, die wir täglich beobachten [1], Beispiele auf„ treten, bei denen $s \neq s'$ ist.

Ich entnehme das Beispiel der Architektur.



[1] oder genauer gesagt (da wir niemals scharfe Flächen beobachten): unter den idealen Flächen, deren Betrachtung uns durch die täg„ liche Beobachtung nahe gelegt wird.

So mögen sich 2 halbkreisförmige Gewölbe kreuzen, so daß sie sich in einem „Kreuzgewölbe" durchdringen. Wir wählen den Scheitel als Koordinatenanfangspunkt, die z-Achse vertikal nach oben, und wollen nun für den Anfangspunkt die Werte s und s' berechnen. Damit wir ein brauchbares Resultat erhalten, das nicht durch die Symmetrie des Gewölbes verdeckt ist, denken wir uns das ganze Gewölbe unter einem Winkel $0 < \alpha < 45°$ gegen das Koordinatensystem x, y orientiert, so daß die Projektion in der x, y Ebene folgende Lage hat:



Wir werden uns für jeden Punkt des Gewölbes p und q berechnen und als Limiten endlicher Differenzenquotienten erklären. Im Scheitel wird dabei jedenfalls $p = 0$, $q = 0$, da entlang der Mittellinie jedes Gewölbes die Tangentialebene übereinstimmt

stimmend horizontal ist; also $p(0,0) = 0$, $q(0,0) = 0$.

Wer ist nun $s(\infty)$ und $s'(\infty)$? Wir definieren sie als Limiten folgendermassen:

$$s = \lim_{k=0} \frac{p(0,k) - p(\infty)}{k}, \quad s' = \lim_{h=0} \frac{(q(h,0) - q(\infty)}{h}$$

Machen wir uns dies nun an der Figur klar, indem wir h und k der Bequemlichkeit halber positiv wählen, so liegt $0, k$ im Gewölbe 1, p misst das Ansteigen oder Fallen des Gewölbes 1 in der Richtung x. Es ist also $p(0,k)$ negativ. Dagegen $h, 0$ liegt im Gewölbe 2, q misst das Ansteigen oder Fallen dieses Gewölbes in der Richtung y. Es ist also $q(h,0)$ positiv. Aus dieser qualitativen Überlegung folgt also:

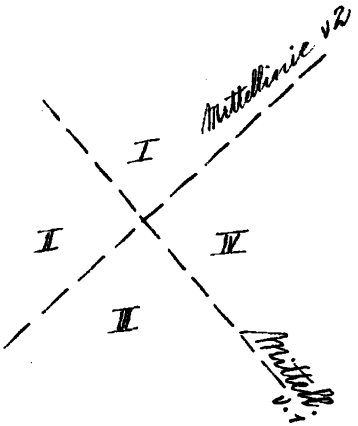
s entsteht durch Grenzübergang aus einem negativen Differenzenquotienten, s' entsteht durch Grenzübergang aus einem positiven Differenzenquotienten. Wenn also s und s' nicht beide gerade Null werden, kann s nicht gleich s' sein.

Wir führen nun Formeln ein, um den Grenzübergang rechnerisch zu verfolgen.

In der ursprünglichen Lage (in der die Mittellinie der Gewölbe den Achsen x, y parallel sind) haben wir die Formeln:

$$x = c_0 - c_1 y^2 + \dots \quad \text{für Gewölbe 2}$$

$z = C_0 - C_1 x^2 + \ldots\ldots$ für Gewölbe 1;
die linearen Glieder fallen wegen $p(\omega) = 0$, $q(\omega) = 0$ fort, die Glieder dritter Ordnung und höherer sind der Einfachheit halber weggelassen, weil sie für das abzuleitende Resultat doch ohne Einfluß sein würden.



Drehen wir jetzt das ganze System um den Winkel α und bezeichnen (wie die Figur andeutet) die verschiedenen Partieen der ganzen Gewölbe mit I ... IV, so haben wir für

I und III $z = C_0 - C_1 (x \sin\alpha - y \cos\alpha)^2 + \ldots$

II — IV $z = C_0 - C_1 (x \cos\alpha - y \sin\alpha)^2 + \ldots$

zu setzen. Und damit für

I und III $\left.\begin{aligned} p &= -2C_1 \sin^2\alpha\, x + 2C_1 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot y + \ldots \\ q &= +2C_1 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot x - 2C_1 \cos^2\alpha \cdot y + \ldots \end{aligned}\right\}$,

II und IV aber

$$\left.\begin{aligned} p &= -2C_1 \cos^2\alpha\, x - 2C_1 \sin\alpha \cos\alpha\, y + \ldots \\ q &= -2C_1 \sin\alpha \cos\alpha\, x - 2C_1 \sin^2\alpha \cdot y + \ldots \end{aligned}\right\}.$$

Im Scheitelpunkte der Kreuzgewölbe sind nach diesen Formeln in der Tat $p = 0$, $q = 0$ für beide Kreuzgewölbe. Im Übrigen aber findet längs

den Durchdringungskurven der Gewölbe eine Unstetigkeit in den Werten von p und q statt; die beiden Wölbungen stossen mit einem Knick aneinander.

Wir berechnen nun s für den Anfangspunkt. Er kommt aus $\mathfrak{p}(0, k)$ in $\mathfrak{U}$, indem wir die höheren Glieder der Reihenentwickelung weglassen:

$$s = \left\{ -\frac{2C_1 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot k}{k} \right\}_{k=0} = -2C_1 \sin\alpha \cos\alpha .$$

Wir haben damit einen von k unabhängigen Wert, der für $\lim_{k=0}$ als negativ bestehen bleibt.

Als Differenzenquotient zur Berechnung von s' ergiebt sich dagegen bei Weglassung der höheren Glieder:

$$s' = + \left\{ \frac{2C_1 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot h}{h} \right\}_{h=0},$$ was wieder einen Wert beim Grenzübergang nicht ändert, da h herausfällt. Es folgt also:

$$s' = + 2C_1 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

Somit ist im Allgemeinen $s \neq s'$ und nur dann kommt $s = s'$, wenn $\alpha = 0°$ oder $= 90°$ ist. —

Dies Beispiel hat, wie Sie sehen, nichts Abstraktes und Schwieriges, sondern etwas ganz Alltägliches. Wir können es z. B. in der Weise auf das Dach eines Regenschirmes verallgemeinern, dass, sobald der Schirm zwar aufrecht, aber nicht nass

rechts und links symmetrisch gehalten wird, dann allemal der hier besprochene Fall $S + S'$ uns zu Häupten in der Spitze eintritt. Wir können hier daher vielleicht so abschließen:

Solche Flächenformen, bei denen S von S' im Sinne des hier erläuterten Beispiels verschieden sind, sind im Grunde alltäglich, und es ist nur Folge unserer scholastischen Erziehung, daß wir nicht daran denken (scholastisch in dem Sinne, daß man kritiklos die Ansätze acceptiert, die man in den Büchern findet). —

Soviel über die Funktionen zweier Veränderlicher von präzisionsmathematischer Seite. Ich gehe jetzt darauf über noch etwas über sie von Seiten der Approximationsmathematik zu bemerken, ähnlich wie oben auf die präzisionsmathematische Behandlung der Funktionen $f(x)$ ein Kapitel über Interpolation zur Annäherung folgte:

Wie wird man nun eine Funktion $f(x\,y)$ approximieren?

Das Nächstliegende ist durch homogene Polynome steigender Ordnung in x, y:

$$z = f_0 + f_1 + f_2 + \dots,$$

die in der Mechanik und Physik, wie wir er-

wähnten, vielfach benutzt werden.

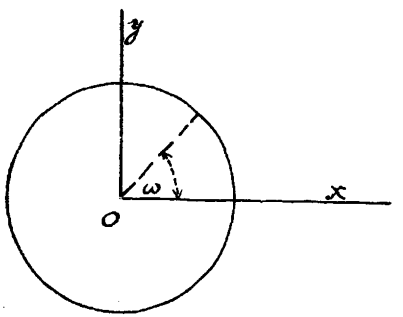
Das andere wäre, daß man den trigonometrischen Reihen entsprechend die Funktion durch Kugelfunktionen zu approximieren sucht (zuerst bei Laplace).

Indem ich den ersten Punkt hier übergehe, gedenke ich etwas über die Kugelfunktionen mitzuteilen, soviel, daß ihr Wesen und ihre darstellende Kraft verständlich wird.

Es soll sich hier also um eine Verallgemeinerung der trigonometrischen Reihen. In dem Zweike müssen wir die Reihe für $f(\omega)$

$$f(\omega) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega + \ldots + a_n \cos n\omega + b_1 \sin\omega + \ldots + b_n \sin n\omega$$

formal etwas anders einführen, als wir es seither taten.



1/ Wir denken uns eine um 2π periodische Funktion $f(\omega)$ mit ihren Werten entlang einer Kreisperipherie, wo ω der Zentriwinkel ist, aufgetragen; der Radius mag 1 sein.

2/ Diese Funktion $f(\omega)$ wird nun durch Paare einzelner Terme $a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega$ approxi-

mierk, deren Gesetz wir etwas anders durch Einführung rechtwinkliger Koordinaten ausdrücken.

Es ist $\cos\omega = x$, $\sin\omega = y$, also $\cos\omega + i\sin\omega = x + iy$ und nach Moivre

$$\cos n\omega + i\sin n\omega = (x+iy)^n \quad \cos n\omega - i\sin n\omega = (x-iy)^n.$$

Es lassen sich hiernach (in sehr bekannter Weise)

3) $\cos n\omega$ und $\sin n\omega$ als homogene Polynome n^{ter} Grades in x, y ausdrücken. Dasselbe gilt für $a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega$. Aber diese Polynome genügen der einfachen Differentialgleichung:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0, \text{ weil ihr } (x+iy)^n$$

und $(x-iy)^n$ genügen. Und nun ist das Wichtigste, dass diese Differentialgleichung charakteristisch ist. Das ist so gemeint:

4) Wenn ich ein homogenes Polynom n^{ter} Grades suche, das der Gleichung $\Delta\Phi = 0$ genügen soll, dann komme ich von selbst dabei auf eine Verbindung $a\cos n\omega + b\sin n\omega$.

Es folgt dies durch eine einfache Abzählung: Ein homogenes Polynom Φ n^{ter} Grades hat $(n+1)$ Koeffizienten. In dem zugehörigen $\Delta\Phi$ hat man ein homogenes Polynom $(n-2)^{\text{ter}}$ Grades mit $(n-1)$ Koeffizienten, das identisch Null sein soll. Damit sind

die $(n+1)$ Koeffizienten $(n-1)$ Bedingungen unterworfen; 2 Koeffizienten bleiben noch willkürlich (also a und b in unserm Ausdruck).

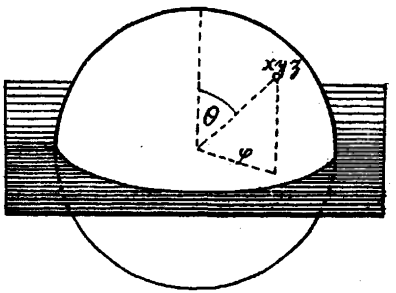
Bezeichnen wir die genannten Polynome n^{ter} Grades mit $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \ldots \mathfrak{F}_n \ldots$, so haben wir das Resultat:

Man kann die gewöhnliche trigonometrische Reihe für $f(\omega)$ berechnen als eine Reihenentwickelung, die nach homogenen Polynomen steigenden Grades von x, y fortschreitet, wobei jedes Polynom der charakteristischen Gleichung $\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y^2} = 0$ genügt. Hernach setzt man $x = \cos\omega$, $y = \sin\omega$.

Dabei ist noch garnicht die Rede davon, ob wir uns mit einer unendlichen oder endlichen Reihe beschäftigen, sondern es ist nur das rein formale Gesetz der Aufeinanderfolge der Terme gemeint. Weiterhin besteht die Kunst natürlich in der zweckmässigen Berechnung der zunächst noch willkürlichen Konstanten a_n, b_n.

Indem ich die gewöhnlichen trigonometrischen Reihen so schildere, werden sie verallgemeinerungsfähig für höhere Dimensionen. Wir gehen nur um eine Dimension in die Höhe:

Wir denken uns eine Kugel vom Radius r und



auf ihr einen Punkt durch die Koordinaten x y z gegeben. Führen wir sodann Polarkoordinaten φ, ϑ ein, wo φ die geographische Länge, von 0 bis 2π. und ϑ, der Abstand vom Nordpunkte, von 0 bis π variiert, so haben wir folgende Formeln:

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi,\quad y = \sin\vartheta\sin\varphi,\quad z = \cos\vartheta.$$

Es sei uns nun eine Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ auf der Kugel gegeben. Wir wollen sehen, ob wir dieselbe durch eine analoge Reihe von homogenen Polynomen n^ten Grades in x y z darstellen können, welche dieselbe der Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

genügen. Also

$$f(\vartheta, \varphi) = \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}_1 + \ldots + \mathfrak{F}_n \ldots.$$

ob die Reihe für $n = \infty$ konvergiert und ob die endliche Reihe unsere Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ irgendwie zweckmässig approximiert, ist eine Sache für sich, von der wir vorläufig gar nicht sprechen. Hier handelt es sich nur darum, das rein formale Gesetz anzugeben, welches sich als eine naturgemässe Verallgemeinerung des früheren ansehen läßt.

Ein einzelnes solches Polynom F nennen wir nun eine Kugelfunktion, so daß wir als Definition erhalten:

Unter einer Kugelfunktion verstehen wir zunächst ein homogenes Polynom n^{ten} Grades in $x\,y\,z$, welches der Differentialgleichung $\Delta F = 0$ genügt.

Später werden wir unter einer Kugelfunktion n^{ten} Grades im engeren denjenigen Ausdruck verstehen, der dadurch hervorkommt, daß wir für $x\,y\,z$ ihre Ausdrücke in φ, ϑ einsetzen. —

Überlegen wir uns, wieviel Konstante in F_n noch unbestimmt bleiben:

Ein beliebiges $F_n(x\,y\,z)$ hat $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Konstante (folgt durch vollständige Induktion aus F_1 mit 3 und F_2 mit 6 Konstanten). Bildet man ΔF, so erhält man ein Polynom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades mit $\frac{(n-1)n}{2}$ Konstanten. Soll dieses identisch verschwinden, so werden den Koeffizienten $\frac{(n-1)n}{2}$ Bedingungen auferlegt; es bleiben also noch

$$\frac{(n+1)(n+2) - (n-1)n}{2} = \frac{4n+2}{2} = 2n+1$$

Konstante willkürlich, so daß wir den Satz haben:

Die allgemeinste Kugelfunktion n^{ten} Grades enthält noch $2n+1$ unbestimmte Parameter; und zwar treten diese Parameter in F linear auf, weil sich aus $\Delta F = 0$ nur lineare Bedingungsgleichungen

chungen für die Koeffizienten von F ergeben.

Wir verifizieren dies für $n = 2$

Das allgemeinste Polynom 2. Grades lautet,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy.$$

Bildet man $\Delta F_2 = 0$, so kommt

$$2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = 0.$$

Es sind also die 6 Koeffizienten einer linearen Bedingung unterworfen, sodass noch 5 Koeffizienten willkürlich bleiben, wie es sein muss. —

Wir wollen nun für die 4 niedrigsten Fälle die Polynome wirklich angeben. Man macht das in üblicher Weise so, dass man an die Polardarstellung anknüpft und in einer speziellen Tafel für $n = 0, 1, 2 \ldots 4$ je $2n+1$ spezielle Kugelfunktionen gibt, aus denen sich dann die allgemeine Kugelfunktion des betreffenden Grades mit beliebigen konstanten Multiplikatoren additiv zusammensetzt.

Ich bemerke, dass man die erste horizontale Reihe sich berechnen muss*), die andern ergeben sich ein-

---

*) Die Verifikation ist natürlich sehr einfach. Man setze z. B. statt $5\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta$ unter Rückgang zu rechtwinkligen Koordinaten

$$5z^3 - 3z(x^2+y^2+z^2)$$

und überzeuge sich, dass Δ verschwindet!

fach, wenn man die Differentialquotienten dieser ersten Glieder nach cos J (unter Weglassung gewisser Zahlenkoeffizienten) mit den angegebenen Faktoren multipliziert (Siehe die Tafel auf der folgenden Seite!

Die allgemeinste Kugelfunktion F_4 setzt sich also aus den 9 hingeschriebenen speziellen linear mit beliebigen Koeffizienten zusammen.

Wir wollen nun, um eine bestimmte Aufgabe vor uns zu haben, eine gegebene Funktion $f(J, \varphi)$ durch die 5 ersten Kugelfunktionen in der Weise approximieren, dass der Rest möglichst klein wird.

Wir setzen also

$$f(J, \varphi) = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \text{Rest},$$

wo uns nun insgesamt 25 Konstante unbekannt sind. Zur Berechnung ziehen wir unsere bereits früher ausgesprochene Idee heran, die Summe der Fehlerquadrate, d. h.

$(f - F_0 + F_1 \ldots - F_4)^2 \times$ Oberflächenelement das der Kugel integriert über die Kugel, zu einem Minimum zu machen.

Ich resumiere die Sache folgendermassen:

Indem wir hier von der unendlichen Reihe absehen, die in den Büchern meist ausschliesslich be-

Kugelfunktionen der 4 ersten Grade.

F_0	$1.$			
F_1	$\cos\vartheta$	$\left.\begin{matrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\end{matrix}\right\\}\,1$		
F_2	$3\cos^2\vartheta-1$	$\left.\begin{matrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\end{matrix}\right\\}\,\cos\vartheta$	$\left.\begin{matrix}\sin^2\vartheta\cos 2\varphi\\ \sin^2\vartheta\sin 2\varphi\end{matrix}\right\\}\,1$	
F_3	$5\cos^3\vartheta-3\cos\vartheta$	$\left.\begin{matrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\cos\varphi\end{matrix}\right\\}\,(5\cos^2\vartheta-1$	$\left.\begin{matrix}\sin^2\vartheta\cos 2\varphi\\ \sin^2\vartheta\sin 2\varphi\end{matrix}\right\\}\,\cos\vartheta$	$\left.\begin{matrix}\sin^3\vartheta\cos^3\varphi\\ \sin^3\vartheta\sin^3\varphi\end{matrix}\right\\}\,1$
F_4	$35\cos^4\vartheta-30\cos^2\vartheta+3$	$\left.\begin{matrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\end{matrix}\right\\}\,(7\cos^2\vartheta-3\cos\vartheta$	$\left.\begin{matrix}\sin^2\vartheta\cos^2\varphi\\ \sin^2\vartheta\sin 2\varphi\end{matrix}\right\\}\,(7\cos^2\vartheta-1)$	
F_4	…(Fortsetzung der voraufgehenden Zeile)	$\left.\begin{matrix}\sin^3\vartheta\cos 3\varphi\\ \sin^3\vartheta\sin 3\varphi\end{matrix}\right\\}\,\cos\vartheta$	$\left.\begin{matrix}\sin^4\vartheta\cos 4\varphi\\ \sin^4\vartheta\sin 4\varphi\end{matrix}\right\\}\,1.$	

handelt wird, die uns hier aber nicht interessiert, da wir von der praktischen Approximation durch eine endliche Reihe handeln wollen, so wird die Aufgabe die sein, die 25 unbekannten Koeffizienten in den Ausdrücken $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1 \ldots \mathfrak{F}_4$ so zu berechnen, daß die Summe der Fehlerquadrate in Bezug auf die Kugel ein Minimum wird.

Das sieht nun so aus, als ob wir 25 lineare Gleichungen allgemeinster Bauart mit 25 Unbekannten auflösen sollten, was natürlich sehr schlimm wäre. Das ist aber nicht der Fall, da die einzelnen Gleichungen nach Ansatz der Rechnung nach je einer Unbekannten bereits aufgelöst sind, wie wir sogleich sehen werden.

Um dies bequem durchzuführen, gebrauchen wir Summenreihen und schreiben für die Kugelfunktionen in der ersten vertikalen Reihe der Tabelle in üblicher Weise $P_n(\cos\vartheta)$. Dann haben wir für die übrigen

$$\left.\begin{matrix}\sin\vartheta^r\cos r\varphi \\ \sin\vartheta^r\sin r\varphi\end{matrix}\right\} P_n^r(\cos\vartheta),$$ wo der Index r in

P_n die r fache Differentiation nach $\cos\vartheta$ (unter Wegwerfung sich abtrennender Zahlenkoeffizienten) andeutet. So wird die ganze Reihe

$$f(\vartheta,\varphi) = \sum_0^n \sum_0^{n-1} \{(a_{n,r}\sin\vartheta^r\cos r\varphi + b_{n,r}\sin\vartheta^r\sin r\varphi) P_n^r(\cos\vartheta)\},$$

was ich zur Abkürzung mit

$$\Sigma\Sigma(a_{n,\nu}\Phi_{n,\nu} + b_{n,\nu}\Psi_{n,\nu})$$

bezeichne.

Wenn man nun zunächst die Summe der Fehlerquadrate aufsucht:

$$\int(f(J,g) - \Sigma\Sigma a_{n,\nu}\Phi_{n,\nu} b_{n,\nu}\Psi_{n,\nu})^2 d\omega,$$

so ergiebt sich, daß sich der Inbegriff der in den a, b quadratischen Glieder wegen der <u>sog. Integraleigenschaft der Kugelfunktionen</u> ausserordentlich vereinfacht.

Bezeichnen nämlich $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ 2 verschiedene von unsern speziellen 25 Kugelfunktionen, dann wird $\int \mathfrak{P}'.\mathfrak{P}''.d\omega = 0$, oder im Besonderen

$\int \Phi'\Phi''.d\omega = 0$, $\int \Phi'\Psi''d\omega = \int \Phi''\Psi'd\omega = 0$ $\int \varkappa'\varkappa''d\omega = 0$

(Vergl. das analoge Verhalten der Integrale ($i \neq k$)

$\int \cos i\alpha . \cos k\alpha\, d\alpha$, $\int \sin i\alpha \cos k\alpha . d\alpha$ [auch $i = k$] $\int \sin i\alpha \sin \alpha k\, d\alpha$

bei den trigonometrischen Reihen)

Dadurch wird die Funktion (nämlich die Summe der Fehlerquadrate, die durch geschickte Annahme der Koeffizienten a, b zu einem Minimum gemacht werden soll) sehr viel einfacher, als man eigentlich annehmen könnte. Sie heißt

$\int f^2 d\omega - 2\Sigma\int f.\mathfrak{F}.d\omega + \Sigma\int \mathfrak{F}^2 d\omega$, wo die Summen über alle spezielle Kugelfunktionen, die oben angegeben sind, zu nehmen. In Φ und Ψ aus-ge-

drückt, lautet die Funktion

$$\mathfrak{R} = \int f^2 \, d\omega - 2\sum\sum \{a_{n,\nu} \int (f \Phi_{n,\nu}) d\omega + b_{n,\nu} \int (f \Psi_{n,\nu}) d\omega\},$$
$$+ \sum\sum \{a_{n,\nu}^2 \int \Phi_{n,\nu}^2 \, d\omega + b_{n,\nu}^2 \int \Psi_{n,\nu}^2 \, d\omega\}.$$

Um sie zu einem Minimum zu machen, setzen wir die Differentialquotienten nach $a_{n,\nu}$ und $b_{n,\nu}$ gleich Null. Wir erhalten

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial a_{n,\nu}} = 0 = -\int f \Phi_{n,\nu} \, d\omega + a_{n,\nu} \int \Phi_{n,\nu}^2 \, d\omega$$
$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial b_{n,\nu}} = 0 = -\int f \Psi_{n,\nu} \, d\omega + b_{n,\nu} \int \Psi_{n,\nu}^2 \, d\omega$$

Wie man sieht, enthält jede einzelne dieser 25 Gleichungen nur eine Unbekannte, wir bekommen ohne weiteres:

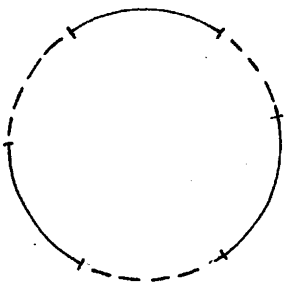
$$a_{n,\nu} = \frac{\int f \Phi_{n,\nu} \, d\omega}{\int \Phi_{n,\nu}^2 \, d\omega}, \quad b_{n,\nu} = \frac{\int f \Psi_{n,\nu} \, d\omega}{\int \Psi_{n,\nu}^2 \, d\omega}$$

<u>Damit ist das Problem gelöst</u>, worauf wir noch folgende allgemeine Bemerkung zufügen:

Das Schöne bei dieser Bestimmungsweise ist, daß (gerade wie bei der Fourier'schen Reihe) der Wert der einzelnen $a_{n,\nu}$ resp. $b_{n,\nu}$, wie er sich aus dem Wahrscheinlichkeitsansatz ergiebt, gar nicht davon abhängt, welche andere Indicespaare n,ν man bei der Approximation von f daneben benutzen will, so daß der Koeffizient $a_{n,\nu}$, der einmal berechnet ist, bestehen bleibt, auch wenn man später die

Reihenentwickelung beliebig ausdehnen will. Haben wir also für eine Annäherung durch Kugelfunktionen bis zur 4ten Ordnung die 25 Koeffizienten berechnet, so werden diese, falls wir zu Kugelfunktionen 5ter Ordnung gehen, durch die hinzutretenden 11 Koeffizienten nicht alteriert.

Alles dies betraf den rein formalen Ansatz der Reihe. Wollen wir jetzt einen Einblick in das Wesen der zunächst nur formal definierten Kugelfunktionen tun, so gehen wir dabei wieder von der Fourier'schen Reihe aus.

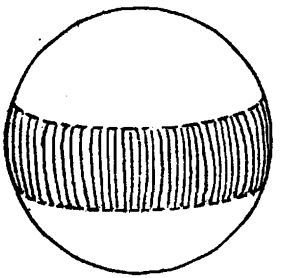


Die Fourier'sche Reihe baut sich aus Termen $\cos n\varphi, \sin n\varphi$ auf; wie diese auf der Kreisperipherie verlaufen, insbesondere wo die Nullstellen liegen, ist ohne weiteres ersichtlich. Die Zahl der Nullstellen ist $2n$ und wächst also mit wachsendem n. Gleichzeitig sind dieselben gleichförmig über die Kreisperipherie verteilt.

Ähnlich ist es nun zunächst bei den Funktionen $P_n(\cos\vartheta)$ d. h. $P_n(z)$.

Wir denken uns eine Kugel und fragen nach den Nullstellen der Funktion $P_n(z)$. Ich behaupte,

ohne hier den Beweis zu geben, da es sich nur um eine erste Übersicht über die Kugelfunktionen handeln soll:



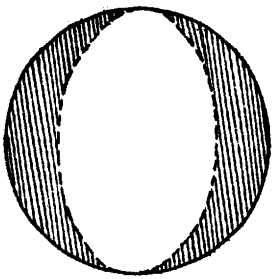
$P_n(\cos\vartheta) = 0$ hat n reelle Wurzeln zwischen $+1$ und -1, die gegen 0 symmetrisch liegen, d.h. es gibt n reelle Parallelkreise auf der Kugel, welche zum Äquator symmetrisch liegen, auf denen $P_n(x) = 0$. Es trennt also eine solche Kugelfunktion $P_n(x)$ die Kugel in $(n+1)$ Zonen, in denen sie abwechselnd positiv und negativ ist. Danach nennt man sie nach dem Vorgange der Engländer „<u>zonale Kugelfunktionen.</u>"

Neben die Kugelfunktion $P_n(\cos\vartheta)$ hatten wir eine Reihe anderer gestellt, die die Faktoren $\left.\begin{matrix}\cos\nu\varphi\\ \sin\nu\varphi\end{matrix}\right\}\sin^\nu\vartheta$ hatten. Nehmen wir vorab gleich den höchsten Fall $\nu = n$, so wird $P_n^n(\cos\vartheta) = 1$, und wir haben es mit den einfachen Kugelfunktionen:

$$\left.\begin{matrix}\cos n\varphi\,.\,\sin^n\vartheta\\ \sin n\varphi\,\sin^n\vartheta\end{matrix}\right\}$$

zu tun. Fragen wir hier nach den Nullstellen, so kommt es wesentlich auf die ersten Faktoren an (die $2n$ geben uns die Pole der Kugel).

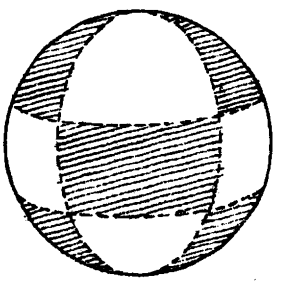
Wir erhalten:



Die Kugelfunktionen $\begin{matrix}\cos n\varphi \\ \sin n\varphi\end{matrix}\Big\} \sin^n \vartheta$ zerlegen die Kugel in $2n$ von meridianen begrenzte gleichwinkelige Sektoren, für welche die Kugelfunktionen abwechselnd positiv und negativ sind. Sie erhalten deshalb den Namen: „sektorielle Kugelfunktionen".

Nun zu den Zwischenfällen:

$$\left.\begin{matrix}\cos r\varphi \sin^r \vartheta \\ \sin r\varphi \sin^r \vartheta\end{matrix}\right\} P_n^r(\cos\vartheta)$$



Der erste Faktor zerlegt die Kugel durch r aequidistante meridianebenen, der zweite (wie nicht schwer zu sehen ist) durch $n-r$ Parallelkreise, sodaß damit die Kugelfläche in einzelne Vierecke zerlegt ist, weshalb man diese Kugelfunktionen als „tesserale Kugelfunktionen" bezeichnet. Damit haben wir den 3ten Satz:

Die sogenannten tesseralen Kugelfunktionen ($r > 0$, aber $< n$) ergeben, gleich Null gesetzt, r Meridiankreise, die sich im Nord- und Südpol un-

ter gleichen Winkeln kreuzen, und n – r Parallel-kreise, die zum Aequator symmetrisch liegen.

Somit wird man also, wie man $\cos ng$, $\sin ng$ entlang der Kreisperipherie als oszillierende Funktionen bezeichnen kann, auch unsern Kugelfunktionen in Bezug auf die Kugel dieselbe Benennung beilegen, indem man dabei ganz genau vor Augen sieht, wie die Gebiete mit positiven und negativen Funktionen abwechseln. Es ist natürlich äusserst interessant, dies bis ins innerste Detail zu untersuchen, insbesondere zu sehen, wie die positiven und negativen Gebiete der verschiedenen Kugelfunktionen übereinandergreifen.

Aus solchen oszillierenden Funktionen baut sich also die Reihe auf, die wir untersuchen. Es fragt sich nun, wie genau die Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ approximiert wird, resp. ob wir den Fehler abschätzen können.

Darüber berichte ich nur:

Der Fehler d.h. die Differenz zwischen der darzustellenden Funktion und der endlichen Summe läßt sich an jeder Stelle in geschlossener Form durch ein über die Kugel erstrecktes Integral angeben, wieder genau entsprechend dem, was bei der Fou-

rier'schen Reihe bekannt ist.

Die betreffende Abschätzung findet sich in den Lehrbüchern, nur dass dort einseitig das Gewicht darauf gelegt wird zu zeigen, dass bei unendlich wachsendem n, im Falle f(x y) eine „vernünftige" Funktion ist, dieser Rest gegen Null konvergiert, während es in der Praxis darauf ankommt, den Rest für endliches n numerisch abzuschätzen.

Dieser ersten Bemerkung über das Restglied füge ich eine zweite hinzu:

Bei der Fourier'schen Reihe zeichneten wir für einfache Beispiele von Funktionen f(x) die verschiedenen Annäherungskurven entsprechend n = 1, 2 ... und machten im Anschluss an die Zeichnungen interessante Beobachtungen (über ungleichmässige Konvergenz u. s. w.)

Für Kugelfunktionen haben wir derartige Zeichnungen resp. Modelle leider nicht in unserer Sammlung. Ich stelle also ausdrücklich die Aufgabe, für irgend welche einfache Funktionen auf der Kugelfläche die Annäherungsflächen zu modellieren und zu studieren. Als einfaches Beispiel schlage ich vor, die in den 8 aufeinanderfolgenden Oktanten des Koordinatensy-

stens abwechselnd die Werte +1 und −1 darbieten, die Funktionen durch Kugelfunktionen bis zur 4.ten Ordnung zu approximieren. [1]

Als letzte Bemerkung füge ich etwas über die Approximation empirischer Funktionen hinzu. Wieweit man da mit dem n zu gehen hat d. h. wieviel Glieder der Kugelfunktionenentwickelung man gegebenenfalls gebraucht, um die für jeden praktischen Fall ausreichende Genauigkeit zu bekommen, dem wird in keiner Weise durch unsere theoretische Entwickelung präjudiziert und kann nur jeweils von dem Fachmann entschieden werden.

Als berühmtes Exemplum führe ich die Arbeit von Gauss aus dem Jahre 1839 an:

Über die allgemeine Theorie des Erdmagnetismus (Resultate des magnetischen Vereins vom Jahre 1839 = Werke Bd. 5), in der das Potential der erdmagnetischen Kraft, wo also $\frac{\partial V}{\partial x} = X$, $\frac{\partial V}{\partial y} = Y$, $\frac{\partial V}{\partial z} = Z$ die Kraftkomponenten geben, von ihm nach Kugelfunktionen bis zur 4.ten Ordnung numerisch berechnet wurde (wobei es sich um 24 Koeffi-

1) Vergl. Protokollbuch des Seminars vom Sommer 1894; Vortrag von Gino Fano.

zienten handelt, insofern eine additive Konstante beim Potential nicht in Betracht kommt.)

Diese Rechnungen sind seit 1839 verschiedentlich mit besserem Beobachtungsmaterial wiederholt, besonders von Neumayer in Hamburg. *) Es zeigt sich hierbei, daß die Annäherung mit Kugelfunktionen bis zur 4ten Ordnung ein Gesamtbild gibt, welches durchaus gut ist, und daß dieses Gesamtbild nicht einmal besser wird, wenn man zu den Kugelfunktionen 5ter Ordnung fortschreitet. Ganß hat hier, wie überall, ein sehr gutes Gefühl für die Bedürfnisse der Praxis gehabt. Auch die Durchführung der Rechnung im Einzelnen ist hochinteressant. —

---

*) Unter Mitwirkung insbesondere von A. Schmidt, Gotha.

Wir wenden uns nunmehr zum zweiten Hauptteile dieser Vorlesung, den ich

II. Freie Geometrie (ebener Kurven)

überschreibe, „frei" insofern wir beim Koordinatensystem wie früher, wo wir den Funktionsbegriff an ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem anknüpfen, bevorzugen. Allerdings werde ich wegen Mangels an Zeit nur die ebenen Kurven behandeln, woraus sich der Klammerzusatz erklärt.

Hier ergiebt sich nun wieder von selbst die Zweiteilung:

1/ Präzisionsmathematische
2/ Approximationsmathematische } Betrachtungen.

Dabei nehme ich wieder stets Anschluß an die Ideenbildungen der analytischen Geometrie d. h. der Geometrie, die sich (auf Grund der geometrischen Axiome) explicite auf den Zahlbegriff stützt, im Gegensatz zur synthetischen Geometrie, die (auf Grund derselben Axiome) an den Figuren selbst operiert.

Hierzu liegt an sich keine sachliche Notwendigkeit vor; man könnte alle Fragen, die ich im Folgenden zu berühren habe, auch von Seiten der synthetischen Geometrie fassen, aber einmal würde dabei der Ausblick auf andere Gebiete der Mathematik, die von den Synthetikern noch nicht bearbeitet sind, verloren gehen und andrerseits liegen die betreffenden Untersuchungen in der Litteratur fast ausschließlich in analytischer Form vor. —

Das Verhältnis von Analysis und Geometrie ist hier im Prinzip kein anderes als im ersten Teil: wir präzisieren die geometrischen Ideen, indem wir sie mit analytischen Entwickelungen begleiten, und wir beleben die Analysis durch den Hinblick auf die geometrischen Figuren!

§. 1 Präzisions-geometrische Betrachtungen zur ebenen Geometrie.

Es handelt sich also für uns zuerst um präzisionsmathematische Betrachtungen, und zwar derjenigen, um solche, bei denen die sogenannte Stetigkeitslehre fundamental ist.

Es gibt bislang nur erst ein Buch, das die hier besonders in Betracht kommenden neuen Dinge, in leidlichem Zusammenhange zusammengestellt, enthält, nämlich:

Camilla Jordan: Cours d'Analyse, 2éd Paris 1893 t. 1
Es steht aber zu hoffen, daß bald die Fortsetzung des Schoenfließ'schen Referates über Mengenlehre für die Deutsche Mathematiker Vereinigung (von dem der erste Teil in Bd. 8 der Berichte erschienen ist) ein bequemes Hilfsmittel zur Orientierung auf dem ganzen in Frage stehenden Gebiete sein wird. *)

Ich gebe zunächst eine kleine Übersicht über die einfachsten hierher gehörigen Definitionen und Sätze:

1) Die Koordinaten x, y eines Punktes sind Zahlen im Sinne des modernen Zahlbegriffs d.h. für uns definiert als unendliche Dezimalbrüche, die eventuell abbrechen.

2) Ein Aggregat mehrerer solcher Punkte (eine Punktmenge) wird, wenn unendlich, an sich Objekt eines eingehenden geometrischen Studiums, wobei sich sehr bemerkenswerte Unterscheidungen ergeben:

a) Der Satz von der Verdichtungsstelle:
Sind in einem endlichen Gebiete unendlich viele Punkte gegeben, so besitzen diese mindestens eine Verdichtungsstelle (einen Grenzpunkt) d.h. eine Stelle, wo die Punkte sich unbegrenzt häufen.

*) Neuerdings ist erschienen: W. H. Young & Gr. Ch. Young, The theory of sets of points, Cambridge 1906 (Zusatz vom Jan. 1906).

b) Eine Punktmenge kann abzählbar sein oder nicht.

c) Enthält sie ihre Grenzpunkte, so heißt sie abgeschlossen. Ist jeder Punkt der Menge ein Grenzpunkt, so heißt sie perfekt.

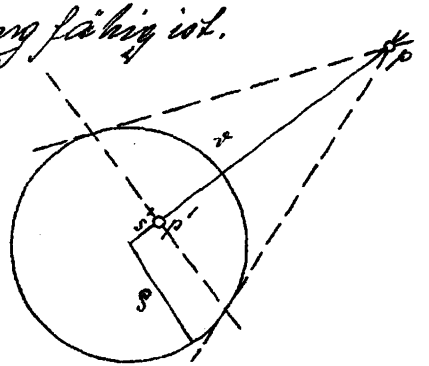
d) Eine Punktmenge kann überall oder nirgendwo dicht sein. Beispielsweise kann man bei der Menge aller rationalen Punkte um keinen Punkt einen so kleinen Kreis beschreiben, daß in dessen Innern nicht immer noch eine unbegrenzte Zahl rationaler Punkte liegt; daher heißt die Menge der rationalen Punkte überall dicht. Würden sich in jedem noch so kleinem Gebiete Lücken nachweisen lassen, innerhalb deren keine Punkte der Menge liegen, so hätten wir eine nirgendwo dichte Menge.

e) Man fragt weiter, ob die Mengen einen endlichen Flächeninhalt haben oder den Inhalt 0, d. h. ob der Limes der Gesamtsumme möglichst kleiner, die Punkte der Menge einschliessenden Kreise endlich ist oder Null. Analog könnte man von einem Umfange einer Punktmenge sprechen.

Sie sehen, es sind dies lauter Begriffsbestimmungen, die an sich leicht aufzufassen sind, deren Würdigung und Verständnis aber erst aus der Be-

schäftigung an konkreten Beispielen erwächst.

Ich möchte Ihnen nun von vornherein die Überzeugung erwecken, daß es sich beim Studium der Punktmengen um echt geometrische Fragestellungen handelt. Statt also Beispiele zu betrachten, die man sich, wie sonst wohl geschieht, scheinbar willkürlich arithmetisch zurecht macht, und die da durch den Eindruck des Künstlichen hervorrufen, wollen wir ein geometrisches Erzeugungsprinzip einer Punktmenge benutzen, welches sich in der Theorie der automorphen Funktionen entwickelt hat, und noch grosser Ausdehnung fähig ist.



Wir betrachten zunächst die Transformation durch reziproke Radien oder die Inversion am Kreise.

Es sei ein Kreis vom Radius ρ gegeben und ein Punkt p ausserhalb des Kreises. Dann gibt das in der Formel $r r' = \rho^2$ ausgedrückte Gesetz der Inversion einen Punkt p' im Innern des Kreises, den man den zu p inversen Punkt nennt (vergl. die Figur). Diese Transformation durch reziproke Radien nennt man gelegentlich „Spiege-

lung am Kreise"; dies ist aber nur cum grano salis zu verstehen, weil wir hier keineswegs das Gesetz der optischen Spiegelung am Konvexspiegel haben. Nur wenn der Kreis g in den Linearkreis ausartet, haben wir direkt Spiegelung im optischen Sinne.

Als Eigenschaften dieser Transformation setze ich die Eigenschaft, stets Kreise wieder in Kreise zu transformieren und dabei die Winkel, unter denen sich die Kreise schneiden, zu erhalten, als bekannt voraus. Dabei ist hervorzuheben, daß die Gerade mit zu den Kreisen gerechnet wird und einfach als Kreis mit unendlich grossem Radius anzusehen ist. Das Unendliche erscheint als einzelner Punkt; die Geraden sind eben diejenigen Kreise, die durch den Punkt „∞" gehen. Man kann die Beziehung zwischen p und p' auch dadurch definieren, daß man sagt: p und p' sind die gemeinsamen Punkte einer Büschels von Kreisen, welche den Grundkreis K orthogonal schneiden. Diese Definition hat den Vorzug, nur mit Elementen zu operieren, welche bei irgend welcher weiteren Inversion invariant sind.

Was nun speziell in der Theorie der automor-

schen Funktionen mit dieser Transformation gemacht wird, ist dieser, dass man beliebig viele derartige Transformationen miteinander kombiniert.

Nehmen Sie folgendes Beispiel.

Es seien 3 Kreise gegeben, die sich nicht schneiden, aber einen Bereich gemeinsam eingrenzen, K_1, K_2, K_3 und ein Punkt p. Wir leiten sofort die inversen Punkte p_1, p_2, p_3 ab und werden von da aus weitergehen, indem wir nun diese Punkte an den Kreisen spiegeln u. s. w. Symbolisch bezeichnen wir die verschiedenen so entstehenden Punkte durch

$$(p)\ S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} S_1^{\alpha_3} S_1^{\beta_1} S_2^{\beta_2} S_3^{\beta_3} \ldots\ldots,$$

wo die $\alpha, \beta, \ldots$ irgendwelche Zahlen und S_1, S_2, S_3 die Transformationen an den Kreisen K_1, K_2, K_3 bedeuten. Da jede Inversion die Periode 2 hat (also S^2 allemal $= 1$ ist), so genügt es, die Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ auf die Werte 0 und 1 einzuschränken. Die Frage ist:

Wie können wir uns von der Menge der so entstehenden Punkte ein Bild machen? wie haben sie für Grenzstellen u. s. w.?

Wir beschäftigen uns im folgenden also mit einer Menge solcher Punkte, die aus einem gege-

benen Punkt dadurch hervorgeht, daß man drei bestimmte Inversionen in irgendwelcher Kombination auf ihn anwendet, daß man also auf ihn die ganze Gruppe der „Transformationen" anwendet, die aus unseren drei „Erzeugenden" erwächst. Wir nennen die betreffenden Punkte kurz aequivalente Punkte.

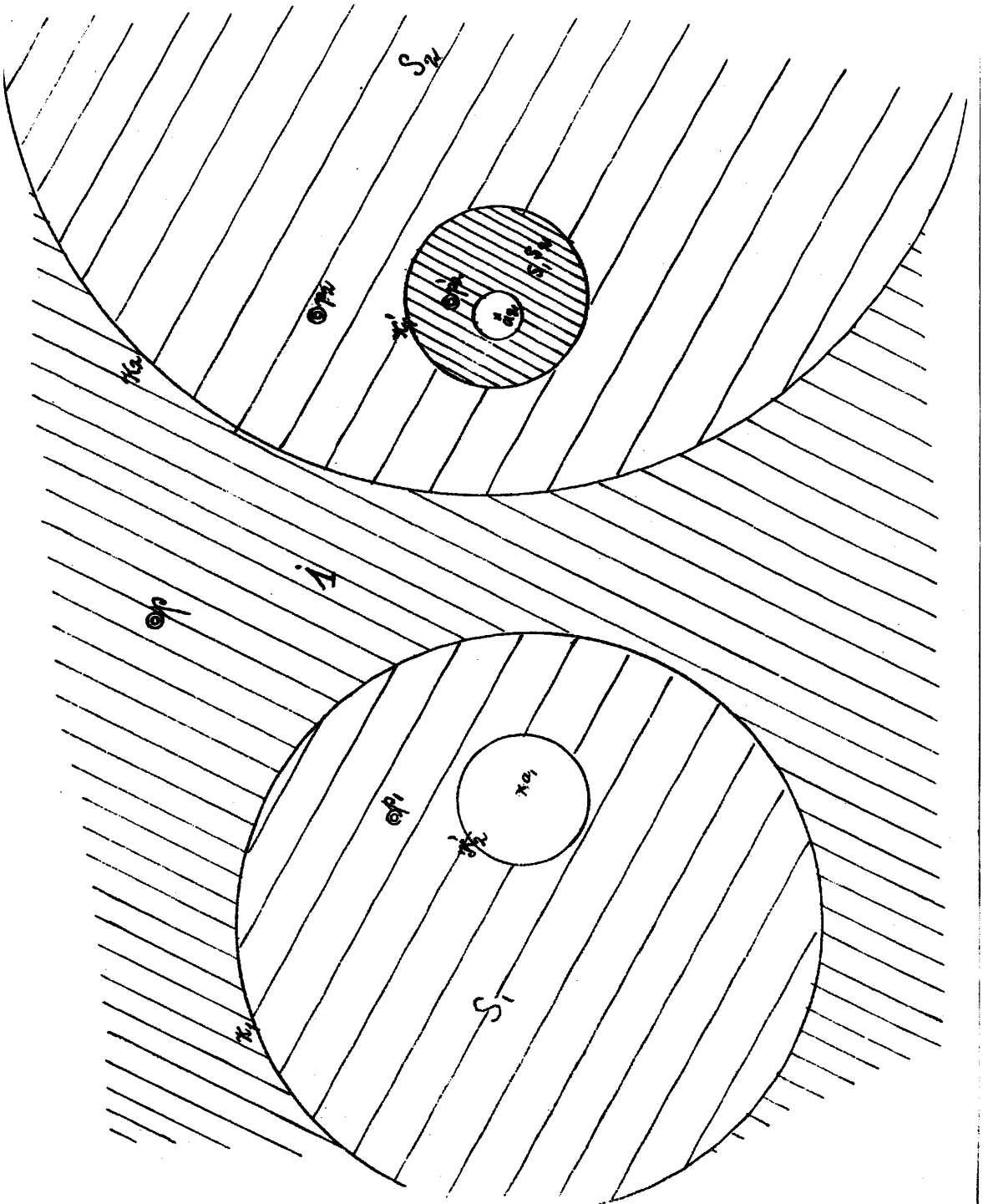
Sollte aber jemand einwenden, diese Fragestellung sei trotz ihrer rein geometrischen Form immer noch sehr künstlich, so ist zu erwähnen, daß die Punktmenge, von der wir hier reden, d.h. die Menge, die aus einem beliebig vorgegebenem Punkte vermöge der wiederholten Inversionen an drei oder mehr Kreisen oder auch Kugeln im Raume erwächst, von W. Thomson und B. Riemann schon um das Jahr 1850 bei Aufgaben der Elektrostatik betrachtet worden ist. Studiert man nämlich das Gleichgewicht der Elektrizität auf n Kugeln des Raumes oder auf n Rotationszylindern mit parallel gestellten Axen (deren Normalschnitt unsere ebene Figur wird), so führt die „Methode der elektrischen Bilder" genau zur Erzeugung und zum Studium unserer Punktmenge.

Dies möge dazu dienen, das Interesse an un-

rerer speziellen Fragestellung zu beleben.

Wir wollen uns die Aufgabe zunächst bei zwei sich nicht schneidenden Kreisen K_1 und K_2 klar machen (vergl. die Figur auf pg. 218); die zugehörigen Inversionen nennen wir S_1 und S_2.

Ein erster Kunstgriff ist, dass wir nicht einen einzelnen Punkt p, sondern gleich die sämtlichen Punkte des zwischen den beiden Kreisen eingeschlossenen Gebietes, das wir mit 1 bezeichnen, den successiven Operationen unterwerfen. Die dabei entstehenden Bereiche nennen wir zu 1 (und damit auch zu einander) <u>aequivalent</u>, wir werden sehen, dass sich diese aequivalenten Bereiche lückenlos aneinanderfügen, ohne irgendwo übereinander zu greifen, wobei schliesslich die ganze Ebene bis auf zwei Grenzpunkte (a_1 und a_2 in der Figur) überdeckt wird. <u>Die Übersicht über die Menge untereinander aequivalenter Punkte ist gewonnen, sobald wir erst die Übersicht über diese aequivalenten Bereiche haben.</u> Denn irgend ein Punkt p der Ausgangsbereiches wird in jedem einzelnen der aequivalenten Bereiche reinerseits einen und nur einen aequivalenten Punkt haben.



Um nun die zu 1 aequivalenten Bereiche zu konstruieren, so entstehen aus 1 durch Anwendung der Spiegelungen S_1 und S_2 zunächst zwei neue Bereiche (cf. Figur), die wir selbst S_1 und S_2 nennen. S_1 legt sich lückenlos längs K_1 an 1 an und ist seinerseits (nach innen hin) von einem neuen Kreise begrenzt, der in der Figur K_2' genannt ist, weil er das (durch S_1 entstehende Bild des Kreises K_2 ist). Genau so legt sich an 1 nach rechts hin der Bereich S_2 mit dem innern Begrenzungskreis K_1'.

Es handelt sich jetzt um Konstruktion ferne rer zu 1 aequivalenter Bereiche und schließlich der Gesamtheit dieser Bereiche. Zu dem Zwecke wollen wir zunächst einmal die Bereiche S_1 und S_2 je an ihrem innern Begrenzungskreise spiegeln, also S_1 an K_2', S_2 an K_1'. Ich sage, daß die neuen Bereiche (die sich glatt in die „Oeffnungen" hineinlegen, welche die Bereiche S_1 und S_2 darbieten), aus 1 durch einfache Kombination der Operationen S_1, S_2 hervorgehen, also zur Serie der von uns gesuchten aequivalenten Bereiche gehören.

In der Tat, betrachten wir die Spiegelung an

K_1'. Zwei Punkte, die in Bezug auf K_1' invers liegen, gehen ersichtlich vermöge S_2 aus solchen zwei Punkten hervor, die in Bezug auf K_1 invers liegen. Denn letztere sind die Basispunkte eines zu K_1 orthogonalen Kreisbüschels, und also sind die beiden Punkte, die aus ihnen vermöge S_2 hervorgehen, Basispunkte eines Kreisbüschels, das zu demjenigen Kreise orthogonal ist, der aus K_1 vermöge S_2 hervorgeht, d. h. zu K_1'. Der Bereich, welcher aus dem Bereiche S_2 durch Inversion an K_1' entsteht, läßt sich daher auch so erzeugen, daß man den Bereich 1 durch die Operation S_1 in den Bereich S_1 verwandelt, und dann auf diesen die Operation S_2 anwendet. Der neue Bereich wird also durch $S_1 S_2$ zu bezeichnen sein und gehört in der Tat zur Serie der von uns gesuchten, zu 1 „aequivalenten" Bereiche. — Genau so wird der Bereich, der sich aus S_1 durch Spiegelung an K_2' ergiebt, mit $S_2 S_1$ zu bezeichnen sein.

In der so geschilderten Konstruktion (bez. dem zugefügten Beweise) liegt nun überhaupt das Fortsetzungsprinzip, dessen wir uns zur Erzeugung neuer und neuer aequivalenter Bereiche bedienen werden. Wir werden jeden neu gewon-

nenen Bereich (jetzt also zunächst die Bereiche $S_1 S_2$ und $S_2 S_1$) immer wieder an seinem inneren Begrenzungskreise spiegeln. Solcherweise entstehen nach rechts hin (vgl. die Figur) die lückenlos aufeinanderfolgenden und successive ineinander geschalteten Bereiche S_2, $S_1 S_2$, $S_2 S_1 S_2$, $S_1 S_2 S_1 S_2$, ..., nach links hin die ebenso aufeinanderfolgenden S_1, $S_2 S_1$, $S_1 S_2 S_1$, ..., die sich immer mehr auf die zwei schon genannten Grenzpunkte a_1 und a_2 zusammenziehen.

Und nun ist das Schöne, daß die solcherweise durch unser Fortgangsprinzip gelieferten Bereiche die Gesamtheit der gesuchten aequivalenten Bereiche erschöpfen. In der Tat kommt ja jede Zusammenstellung, die wir aus den Symbolen S_1 und S_2 durch Wiederholung bilden können, mit Rücksicht darauf, daß $S_1^2 = 1$ und $S_2^2 = 1$ ist, auf eine bloße Aufeinanderfolge abwechselnder $S_1 S_2$ heraus und jede derartige Aufeinanderfolge findet sich als Benennung für eines der durch unser Fortgangsprinzip erzeugten Gebiete wieder. (Endet die Aufeinanderfolge, die wir betrachten mögen, mit S_2, so findet sich das zugehörige Gebiet in der Figur rechter Hand, sonst linker Hand).

Wir haben in der durch unser Fortgangsprin-

zip erzeugten Figur also die Gesamtheit der aequivalenten Bereiche vor uns, und damit auch einen Überblick über die Gesamtheit der aequivalenten Punkte. Wir bemerken gleichzeitig, daß die Gesamtfigur nicht nur in Bezug auf K_1 und K_2, sondern in Bezug auf jeden einzelnen Kreis, längs dessen zwei Nachbargebiete aneinander grenzen, also z.B. in Bezug auf K_1' oder in Bezug auf K_2' sich selbst invers ist. Der Beweis möge hier für den Kreis K_1' geführt werden. Durch die Inversion an K_1' entsteht, wie wir wissen, aus dem Gebiete S_2 das Gebiet $S_1 S_2$. Die Inversion an K_1' hat also ihrerseits das Symbol $S_2 \cdot S_1 S_2$, oder was dasselbe ist, $S_2 S_1 S_2$. Will ich nun diese Operation auf irgend einen der von uns erzeugten Bereiche anwenden (der selbst durch irgend eine Aufeinanderfolge der Symbole S_1, S_2 gegeben ist), so habe ich der Aufeinanderfolge einfach die Buchstabenfolge $S_2 S_1 S_2$ hinzuzusetzen, wodurch, wie ersichtlich, die Benennung eines anderen, ohnehin in unserer Figur vorhandenen Bereiches entsteht. Hierin liegt der Beweis.

Mit dem so bewiesenen Satze haben wir zugleich eine Verallgemeinerung unseres Fortgangsprinzipes. Wir hatten bisher den Kreis K_1' nur so benutzt,

daß wir an ihm den angrenzenden Bereich S_2 spie-
gelten und dadurch den gleichfalls angrenzenden Be-
reich $S_1 S_2$ gewannen. Wir können offenbar ebensowohl
die sämtlichen drei schon vorher konstruierten Be-
reiche, nämlich die nebeneinander liegenden Bereiche
S_2, 1, S_1, gleichzeitig an K_1' spiegeln und erhalten
dadurch mit einem Schlage drei neue Bereiche, näm-
lich $S_1 S_2$, $S_2 S_1 S_2$, $S_1 S_2 S_1 S_2$. Dann haben wir im
Ganzen 6 nebeneinander liegende Bereiche und die-
se können wir dann alle 6 gleichzeitig an dem in-
nern Begrenzungskreise von $S_1 S_2 S_1 S_2$ invertieren,
um mit einem Schlage 6 neue Bereiche zu haben
u. s. w. Ich nenne dies das erweiterte Fortgangs-
prinzip.

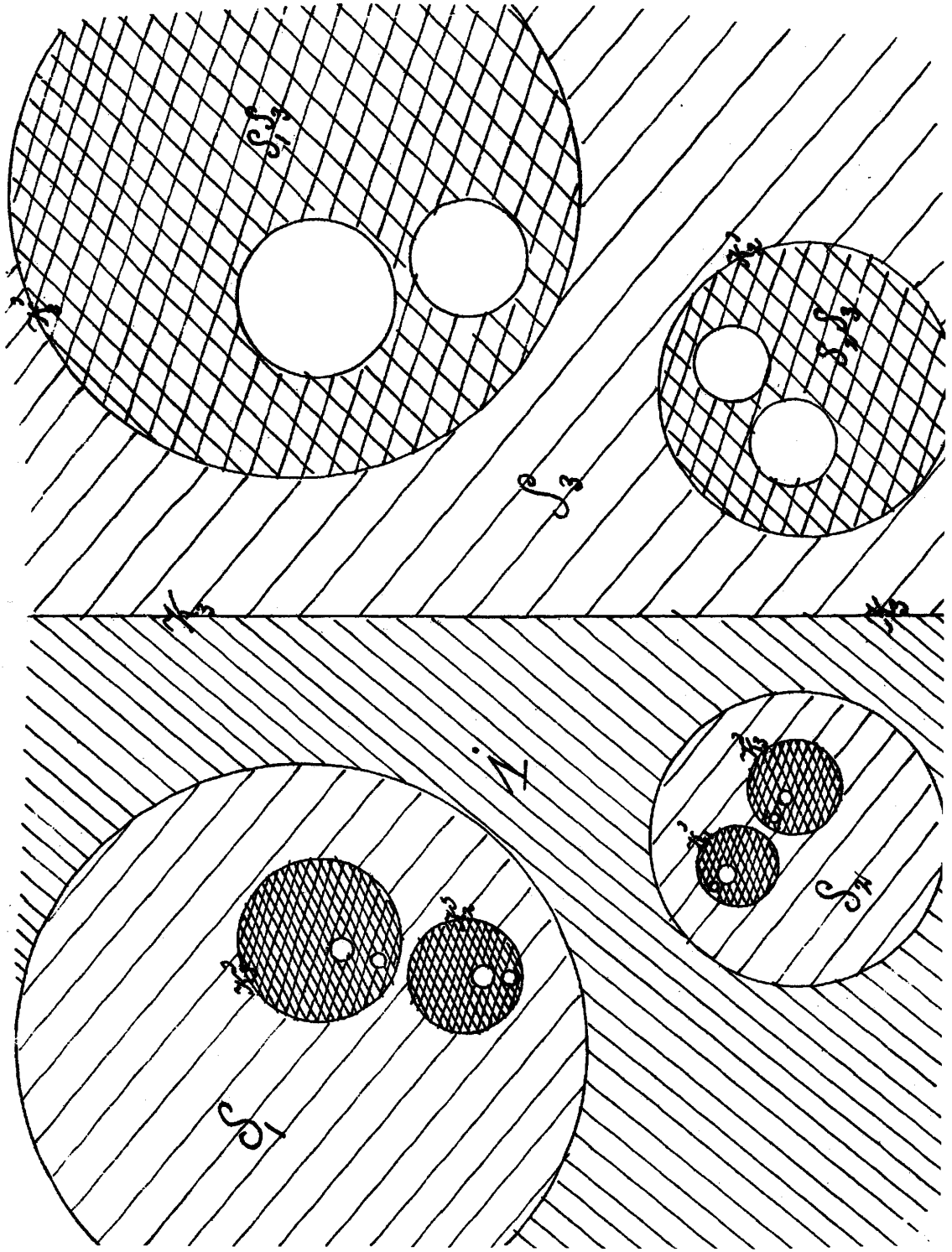
Die hiermit geschilderten Beziehungen, welche
man an der Figur in's Einzelne verfolgen möge,
geben uns nunmehr das Mittel, um auch in den
höheren Fällen zurecht zu kommen, wo Inversio-
nen an mehr als zwei gegebenen Kreisen unbegrenzt
oft mit einander kombiniert werden sollen.

Wir betrachten zunächst den Fall von drei Krei-
sen K_1, K_2, K_3 (die sich nicht schneiden und mit
einander ein gemeinsames Gebiet eingrenzen,
welches wir 1 nennen).

Wir nehmen speziell einen Kreis K_3 als Geradean (vergl. die Figur pg. 225). Wir unterwerfen das Gebiet den Inversionen an K_1, K_2, K_3 und erhalten die Bereiche S_1, S_2, S_3 mit je zwei inneren Begrenzungskreisen K_2', K_3' u.s.w. Unser Fortgangsprinzip ist jetzt dieses, daß wir jeden der neuen Bereiche S_1, S_2, S_3 an den inneren Kreislinien, durch welche er begrenzt ist, weiter invertieren. Es entsteht jeweils ein neuer Bereich, wieder mit zwei innern Begrenzungslinien und an diesen invertieren wir abermals und so fort in's Unendliche. Es wird so die ganze Ebene „einfach" mit unendlich vielen aequivalenten Bereichen überdeckt resp. mit lauter Mengen von unendlich vielen unter sich aequivalenten Punkten, mit Ausnahme der Grenzpunkte, denen die Öffnungen der jeweils konstruierten Bereiche, indem sie immer kleiner und zahlreicher werden, „zustreben".

Es entsteht die Frage. Wer läßt sich über die Menge der Grenzpunkte mit Vernünftiger aussagen, nachdem die Vorstellungskraft schon bei den ersten wenigen Inversionen ermüdet?

Ich rekapituliere noch einmal das Wesentliche in drei Nummern:



1) Nicht einen einzelnen Punkt p, sondern gleich den ganzen Bereich 1 (Fundamentalbereich) unterwerfen wir den successiven Transformationen.

2) Die Vervielfältigung unseres Ausgangsbereiches geschieht am besten (weil für die Auffassung leichter) so, dass man jeden neu erhaltenen Bereich oder auch die ganze bis dahin erhaltene Figur immer wieder an den freien kreisförmigen Begrenzungslinien, die er darbietet, spiegelt. (Ursprüngliches und erweitertes Fortgangsprinzip).

3) Die ganze Ebene wird schliesslich mit unendlich vielen Bildern des Ausgangsbereiches, die sich lückenlos aneinander schliessen, vollständig bedeckt, bis auf die unendlich vielen Grenzpunkte, denen man bei Fortsetzung unserer Konstruktion zustrebt.

Man könnte natürlich auch 4, 5 oder mehr Ausgangskreise annehmen. Da tritt dann aber eine Komplikation ein, die ich jetzt bezeichnen will, oder vielmehr ich will hervorheben, dass unsere auf 3 Kreise bezügliche Figur noch einen gewissen Charakter der Einfachheit besitzt.

Drei Kreise haben bekanntlich einen und nur einen Orthogonalkreis und dieser gemeinsame Orthogonalkreis geht bei den Inversionen S_1, S_2, S_3 in

sich selbst über, weil er der einzige Orthogonal-
kreis ist. Er geht daher auch bei allen Wiederholun-
gen und Kombinationen dieser Inversionen der Ortho-
gonalkreis in sich selbst über. Es folgt, dass alle
die unendlich vielen Kreise, die aus drei Ausgangs-
kreisen bei Inversion erwachsen, auf dem festen Or-
thogonalkreis senkrecht stehen, dass sich also alle
Bereiche, die aus dem Fundamentalbereiche er-
wachsen, gleichsam auf den Orthogonalkreis stützen,
d. h. sie durchsetzen ihn und sind in Bezug auf
den Orthogonalkreis selbst symmetrisch. Die Berei-
che „reihen" sich entlang dem Orthogonalkreis „an-
einander". Infolgedessen sind alle die Grenzpunk-
te, von denen wir reden, auf der Peripherie des ge-
meinsamen Orthogonalkreises angeordnet.

Das ist nun insofern sehr beruhigend, weil wir
auf diese Weise sozusagen einen Halt zur Be-
urteilung der Lage der Grenzpunkte haben.

Gehen wir nun aber zu 4 und mehr sich
nicht schneidenden Kreisen über, die im-
mer so liegen müssen, dass sie einen gemein-
samen Bereich eingrenzen, so kann im Be-
sonderen allerdings auch hier ein Orthogonal-
kreis existieren, sodass dann die Grenzpunkte

das nämliche Verhalten zeigen. Im Allgemeinen existiert er aber nicht, sodass es keinen Ariadnefaden gibt, der uns mit Sicherheit durch das Labyrinth der aequivalenten Bereiche und ihrer Grenzpunkte hindurchführen könnte.

Nun wollen wir aber auch im allgemeinen Falle etwas über die Mannigfaltigkeit der Punkte aussagen. Zunächst wiederhole ich, dass eine räumlich konkrete Vorstellung des Resultates schon bei $n = 3$ und um so mehr bei $n > 3$ unmöglich ist; unsere Vorstellungskraft findet gar bald an den einfachsten Inversionen ihre Schranken[1], und es gelten auch für uns hier vor dem Unendlichen stehend die Worte Schillers („Die Grösse der Welt"):

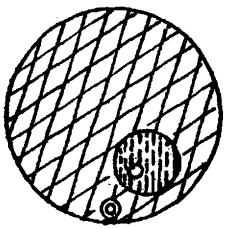
Senke nieder
Adlergedank', dein Gefieder!
Kühne Seglerin, Phantasie,
Wirf ein mutloses Anker hie.

Aber um so bemerkenswerter ist es, dass man, indem man an der begrifflichen Definition derselben festhält, über die Mannigfaltigkeit der Grenzpunkte nun tatsächlich etwas aussagen kann.

---

[1] Es ist dies ein besonders schöner Beispiel für meine These, dass die Gegenstände der Präzisionsgeometrie jenseits unseres Vorstellungsvermögens liegen.

Und dies ermöglicht zu haben, ist das besondere Verdienst von G. Cantor, der zum ersten Male auch das Unendliche als solches den mathematischen Überlegungen zu unterwerfen lehrte.



Es sei der nebenstehend gezeichnete Kreis ein Begrenzungskreis unserer Figur, in den alle Details der Aussenfigur hineingespiegelt werden. Es ist klar, dass nicht das ganze Innere des Kreises mit singulären Punkten ausgefüllt ist, sondern dass in ihm zunächst neue singularitätenfreie Bereiche mit neuen kreisförmigen Grenzlinien Platz finden. Wir schliessen, dass man keinen endlichen Bereich, auch kein endliches Stück einer Kurve angeben kann, der ganz mit singulären Punkten besetzt wäre. Wir kommen also zu unserm ersten Schluss:

1) Aus unserm Fortgangsprinzip ergiebt sich, dass die Menge der singulären Punkte nirgendwo dicht liegt.

Wir nehmen nunmehr einen singulären Punkt heraus und umgeben ihn mit einem kleinen Begrenzungskreis. Dann ist klar, dass man, da die ganze Aussen-

figur in diesen Kreis hineingespiegelt wird, mit unendlich vielen singulären Punkten in diesen Begrenzungskreis hinein und somit unserm anfänglichen Grenzpunkt beliebig nahe kommt, d. h. jeder singuläre Punkt unserer Figur ist selbst ein Verdichtungspunkt unendlich vieler singulärer Punkte, oder kürzer:

2) Die Menge der singulären Punkte ist perfekt.

Die Sätze 1) und 2), nach unserer bei dem Endlichen gebildeten Gewöhnung scheinbar unverträglich, schliessen sich hier, wo wir es mit unendlichen Punktmengen zu tun haben, nicht aus.

Wir fragen weiter nach der Mächtigkeit der Grenzpunkte.

Gehen wir von 3 Kreisen K_1, K_2, K_3 aus; jeder Kreis z. B. K_3 erhält in seinem Innern zwei neue K_3' und K_3'' u. s. w. Fallen wir nun auf eine Verdichtungsstelle zusteuern, so haben wir Kreise 1, 2, 3 d. h. K_1, K_2, K_3 beziehungsweise zu ihnen aequivalente Kreise in einer genau anzugebenden Reihenfolge zu überschreiten. Oder etwas anders gewandt.

Der einzelne singuläre Punkt ist vollständig durch eine unendliche Aufeinanderfolge der

Zahlen 1, 2, 3 ... charakterisiert, die nur so gebildet ist, daß nie zweimal dieselbe Ziffer nacheinander folgt.

Und nun ist die Frage: Wieviel solcher unendlicher Reihen gibt es?

Die Anzahl aller dieser Kombinationen von 3 Zahlen ist (was ich nicht noch weiter auseinanderlegen will) so groß wie die Anzahl aller Dyalbrüche, d. h. aller Brüche, die nach Potenzen von 1/2 fortschreiten. Wir kommen somit auf die Mächtigkeit des Kontinuums.

Sie sehen, wie wir schon bei dem allereinfachsten Beispiele automorpher Figuren die wunderschönsten Eigenschaften der Mengen beieinander haben!

Wir gehen nun weiter und fragen nach dem Inhalte unserer Punktmenge d. h.

Man untersuche, ob die Summe der immer kleiner, aber immer zahlreicher werdenden Kreisflächen, in welche die singulären Punkte eingeschlossen sind, bei allseitiger Fortsetzung unserer Konstruktion beliebig klein wird, oder endlich bleibt. Im ersten Falle sagen wir, der Inhalt ist Null, im zweiten Falle wird man von einem endlichen Flächen-

Inhalt sprechen.

Unter dem Umfange werden wir ganz entsprechend den Limes der Umfänge der Kreise verstehen, in welche wir unsere Punkte einschliessen können.

Mit diesen Fragen kommen wir bereits an das Gebiet der Unbekannten (aber nicht Unerkennbaren). Die Sache wird mit einmal schwierig sein, sie ist nur noch nicht bearbeitet. Das Einzige, was man vorläufig in dieser Hinsicht sagen kann, ist, dass der Inhalt der Punktmenge, im Falle ein Orthogonalkreis vorhanden ist, verschwindet.

Dies gibt mir Anlass, in folgender Weise fortzufahren.

Zunächst bemerke ich, dass die Theorie der automorphen Funktionen dazu führt, noch sehr viel komplizierte Figuren als die jetzt von uns besprochenen zu betrachten (man vgl. die zahlreichen Figuren in Fricke-Klein: Theorie der automorphen Funktionen 1, Leipzig 1897, pg. 428 ff.). Überhaupt aber treten unendliche Mengen von Punkten oder sonstigen Gebilden, die die Geometrie betrachtet, immer notwendig ein, sobald man in die Geometrie die Idee des gesetzmässig unendlich fortschreitenden Konstruktionsprozesses einführt. Das heisst aber, dass die then-

genlehre nicht nur für geometrische Figuren der Theorie der automorphen Funktionen, sondern genau so für zahlreiche andere Teile der Geometrie ihre grundlegende Bedeutung besitzt.

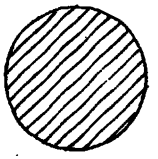
Ferner aber: Alles dieses ist natürlich Präzisionsmathematik. In der Approximationsmathematik geht der hier charakteristische vollständig verloren.

Drittens will ich der Hoffnung Ausdruck verleihen, daß die Mengenlehre, sowie sie der Geometrie ihre Hilfe bietet, auch umgekehrt durch letztere neue Förderung erhalten möge. Bisher erscheinen die Beispiele, welche die Mengentheoretiker heranbringen, vielfach als etwas Künstliches, während wir doch, von der Geometrie ausgehend, wie wir sahen, auf gemeinem Wege zu echten Fragen der Mengenlehre geführt werden. Die Geometrie ist da noch der wunderbarsten Weiterbildungen fähig!

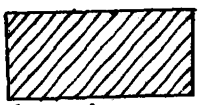
Bislang sprachen wir nur von einer Menge diskreter Punkte. Die nächstliegende weitere Frage, die auch wieder zuerst auf dem Boden der Funktionentheorie erwachsen ist und für die zuerst Weierstraß in seinen Vorlesungen eine Antwort nötig hatte, ist:

Kann man nun eine zweidimensionale Punkt-

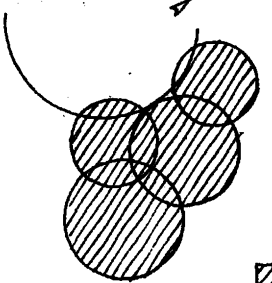
menge d. h. eine Menge der Ebene ein Kontinuum nennen?[2]

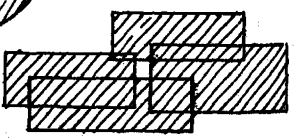


Als einfachstes Beispiel bietet sich für das, was wir ein Kontinuum in der Ebene nennen, die Gesamtheit der Punkte im Innern eines Kreises oder Rechtecks dar, wobei wir durch Verabredung die Randpunkte von der Menge selbst ausschließen wollen.



Der Weiteren bezeichnet man dann als Kontinuum die Gesamtheit der inneren Punkte solcher Kreise oder rechteckigen Flächen, die dachziegelartig übereinandergreifen.





Wir nehmen damit folgende beiden Eigenschaften in die allgemeine Definition eines zweidimensionalen Punktkontinuums auf:

1) Zunächst verlangen wir „den Zusammenhang" der Menge überhaupt (was man auch noch mengentheoretisch definieren mag).

2) Wir verlangen ferner, daß es möglich sein soll, um jeden Punkt der Menge einen Kreis zu beschreiben, so daß alle inneren Punkte desselben der Menge

angehören.

Für nun die Frage nach dem Rande einer solchen Punktmenge betrifft, so erlauben uns unsere bisherigen Kenntnisse hier schon die mannigfachsten Beispiele für die Begrenzung heranzubringen:

1) Alle Punkte der Ebene bis auf einen Punkt o können der Menge angehören.

2) Indem wir uns an das auf pg 213 ff behandelte Beispiel aus der Theorie der automorphen Funktionen erinnern, sehen wir, daß ein Kontinuum auch von einer unendlichen Reihe von Punkten begrenzt werden kann, die aber nirgendwo dicht zu sein brauchen (Reihe der Grenzpunkte bezw. Kontinuum der ränderlichen miteinander äquivalenten Bereiche).

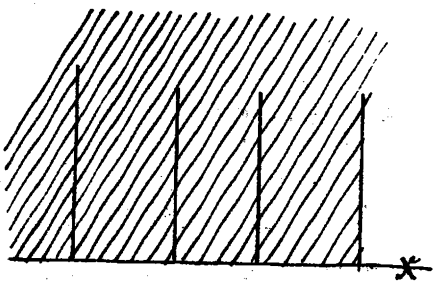
3) Der Weiteren kann die Begrenzung von einer Kurve im gewöhnlichen Sinne (Kreis, Rechteck u. s. w.) gebildet werden.

4) Es gibt aber noch andere Begrenzungen, die in neuerer Zeit besonders von W. F. Osgood[1] behandelt werden.

Wir beschränken uns z. B. auf die positive Halbebene (oberhalb der x-Axe) und machen

---

[1] Siehe z. B. Trans of the Amer. math. Soc. 1 (1900) pg. 310 ff.



an bestimmten Stellen gerad„ linige Einschnitte, die wir im Gegensatz zu den sonstigen Punk„ten der Halbebene nicht mit zum Bereich zählen wollen. Nunmehr denken wir uns die Zahl dieser Einschnitte stets grösser werdend; wenn sie nur nicht überall dicht liegen, gibt es immer noch Streifen des Bereiches, die sich zwischen den Einschnitten hindurch an die x-Axe heranzie„hen. Dass es solche nirgendwo dichte und dabei per„fekte Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums gibt, sahen wir früher; man erinnere sich an die singulären Stellen auf dem Orthogonalkreis un„serer automorphen Figur. Wir sehen also, dass ein Kontinuum auch unendlich viele Einschnitte be„sitzen kann, die sich so gruppieren, wie die Punk„te einer nirgendwo dichten, aber trotzdem unend„lichen und dabei perfekten Menge!

Diese 4 Beispiele zeigen uns, wie mannigfaltig die Begrenzung eines Bereiches (die man doch gewöhnlich kurzweg als Kurve voraussetzt) sein kann, sodass wir dem heutigen Stande der Wis„senschaft entsprechend sagen müssen:

<u>Ein Kontinuum kann Grenzen der aller„</u>

verschiedensten Art haben, und eine Kurve als Grenze eines Bereiches kurzweg zu definieren, ist völlig unzulässig (natürlich nur im Gebiete der Präzisionsmathematik, wo wir es mit den auf Grund des modernen Zahlbegriffs idealisierten Gebilden, hier speziell mit den idealisierten Gebilden der Raumanschauung zu tun haben.)

Wie definieren wir denn nun eine Kurve? Dies geschieht jetzt allgemein so, daß man folgenden Ansatz macht:

Man gibt eine Variable t, die alle Werte eines Intervalls $a \ldots b$ durchlaufen soll und setzt die Koordinaten eines Punktes gleich stetigen Funktionen dieser Hilfsvariablen, also $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; von der solcherweise definierten Punktmenge sagt man, daß sie eine Kurve bildet. In freie Worte gefaßt lautet also die Definition einer Kurve:

Eine ebene Kurve ist eine Punktmenge der Ebene, die stetig auf ein Geradenstück abgebildet werden kann.

Unwillkürlich mischen sich übrigens bei einer solchen Definition der Kurve durch einen Parameter t mechanische Auffassungen ein. Man kann t als Zeit fassen (woher auch die gewöhn-

liche Bezeichnung durch den Buchstaben t) und sagen:

Während der Parameter t die Zeit von a bis b durchläuft, läuft der Punkt $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ auf der Kurve.

Oder anders gefasst: Die Kurve ist die Bahn eines Punktes, der sich während eines Zeitintervalls stetig bewegt.

Dies ist alles sehr leicht zu verstehen. Schwieriger wird es, wenn wir nach den gestaltlichen Verhältnissen fragen, die bei einer so definierten Kurve auftreten können.

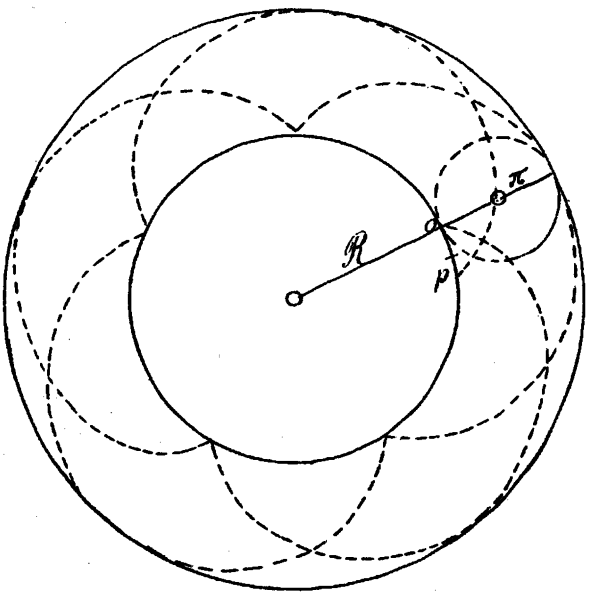
Ich muss hier insbesondere auf eine Entdeckung von Peano aufmerksam machen, die er 1890 in den Mathem. Ann. Bd. 36 veröffentlichte und die von Hilbert Mathem. Ann. Bd. 38 (1891) geometrisch erläutert wurde. Es handelt sich um die Bemerkung, dass eine durch $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ definierte Kurve ein ganzes Flächenstück völlig bedecken kann.

Es ist übrigens nicht etwa schwer, sich ein derartiges Beispiel zu bilden, nur ist man nicht gewöhnt an solche Figuren zu denken.

Ich ordne meinen Vortrag über die Peano-Kurve (oder vielmehr ein einzelnes Beispiel dersel-

ben / in der Weise an, daß ich zuerst sage, was mit einer solchen Kurve nicht gemeint ist. Jemand könnte nämlich, wenn er von dem Peano'schen Resultate hört, auf die Verhältnisse bei den Cykloiden als etwas Allbekanntes hinweisen.

Lassen wir nämlich auf einem Kreis mit dem Radius R einen andern mit dem Radius ρ abrollen und nehmen das Verhältnis ρ/R irrational, so erhalten wir eine Epicykloide, die sich



niemals schließt, und in Folge davon den ringförmigen Bereich, in dem sie liegt, überall dicht überdeckt. Darin liegt, daß wir jedem Punkt, den

wir z. B. auf der Peripherie von R geben, beliebig nahe kommen können, aber es liegt nicht darin, daß der Punkt auch wirklich erreicht wird. Ein Beispiel für einen Punkt, den ich nicht erreiche, wie oft auch der rollende Kreis auf dem festen Kreis abläuft, ist ein Punkt p, der von dem Ausgangspunkte o der Rollbewegung um den entlang dem festen Kreise gemessenen Bogen $2\pi R \frac{m}{n}$ entfernt ist, wo m und n ganze Zahlen sind. In der Tat kommen wir in diesen rationalen Punkt bei unserm vorausgesetzten irrationalen Verhältnis $\frac{R}{n}$ nie hinein; es gibt kein bestimmtes t, das uns diesen Punkt lieferte. Also realisiert diese Kurve, wie immer sie auch an sich sein mag, nicht das, wovon in dem Peano'schen Satz die Rede ist, indem bei Peano eine Kurve hergestellt werden soll, die jeden Punkt eines Flächenstücks für einen bestimmten Wert von t wirklich erreicht.

Zum gleich zur geometrischen Erläuterung der Peano Kurve!

Ich gebe zuvor noch zwei Zitate:

A. Schönflies, Kurven und Punktmannigfaltigkeiten, Vortrag auf der Naturforscher-Versammlung in Düsseldorf 1898, vergl. den Bericht, Jahresb. d. D. M. Ver. 8 (1900) p. 121 ff.

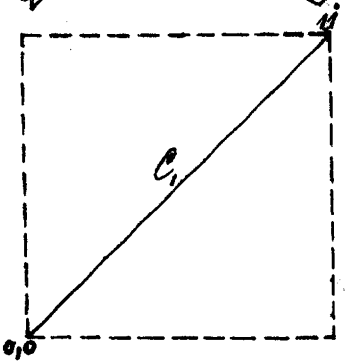
E. H. Moore: on certain crinkly curves, Trans. of the American Math. Soc. 1 (1900),

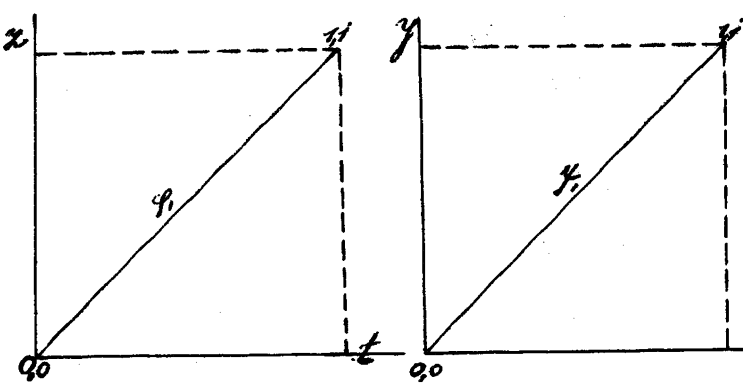
insofern durch diese Dinge etwas Greifbares mit verschie-

denen Figuren entwickelt sind. Ich behandele nur einen einzelnen Fall.

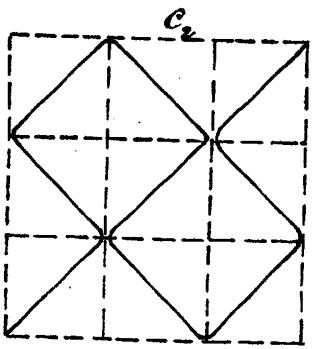
Ich gehe an die Peano-Kurve in der Weise heran, daß ich mir eine gesetzmässige Reihe von Kurven $C_1, C_2, C_3 \ldots$ definiere, von denen ich schließlich das letzte Glied C_∞ meine.

Wir zeichnen uns ein Quadrat von der Länge 1 und nehmen die Diagonale $\overline{0,0\ 1,1}$ als Kurve C_1. Darunter zeichnen wir die xt u. yt-Ebenen und definieren t als die Länge der Diagonale dividiert durch $\sqrt{2}$, so daß die Kurven $x = \varphi_1(t)$, $y = \psi_1(t)$ in den Ebenen xt, yt gerade Linien werden, welche unter 45° bez. durch 0 laufen (t läuft dabei von 0 bis 1).

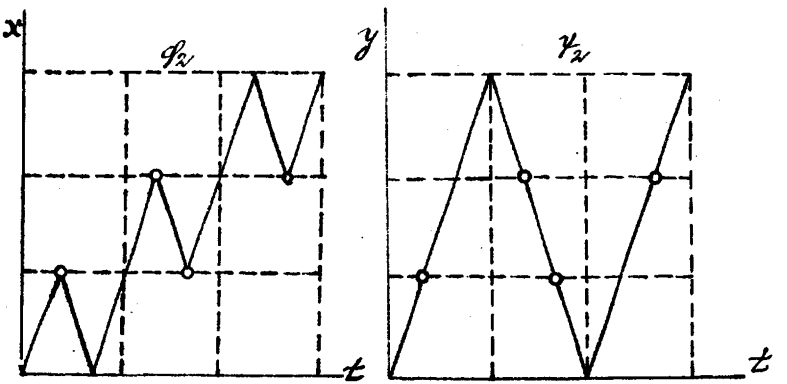




Jetzt kommt nun der entscheidende Schritt, der uns C_2 liefert.



Wir behalten den Anfangspunkt und Endpunkt der Diagonale bei, teilen das Quadrat in 9 kleinere Quadrate und ersetzen statt der grossen Diagonale 9 kleinere ein, die in diesen neun Quadraten liegen *) und die so



aneinandergereiht sind, dass 2 Punkte im Inneren der grossen Quadrate als Doppelpunkte der Gesamtkurve erscheinen. (Die Figur weist an diesen Stellen Abrundungen auf, damit sich die Aufeinanderfolge der einzelnen Teile der gemeinten Kurve besser verfolgen lässt.) Die Länge der neuen Kurve ist offenbar dreimal so lang wie C_1, also $3\sqrt{2}$. Definieren wir t

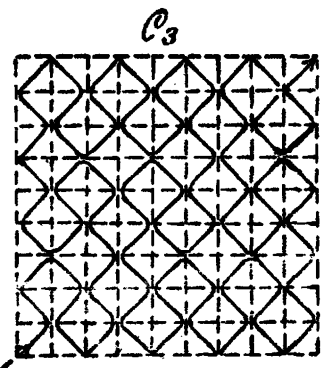
*) Statt 9 könnten wir ebensowohl, ohne dass sich etwas Wesentliches änderte, das Quadrat einer ungeraden Zahl > 3 nehmen.

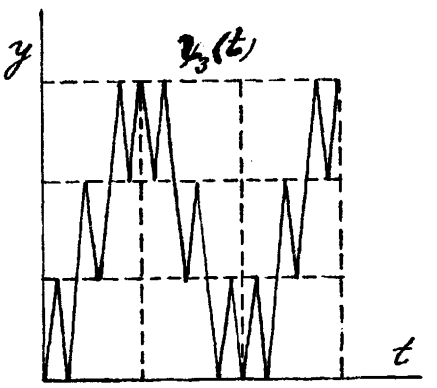
als Länge $1/3\sqrt{2}$, so erhalten wir für $x = g_2(t)$, $y = \gamma_2(t)$ obenstehende Darstellungen (dabei läuft t wieder von 0 bis 1). Die Kurve g_2 entsteht dadurch aus γ_2, daß man diese dreimal in verkleinertem Maßstabe diagonaliter aneinanderreiht.

Diesen Übergang von C_1 zu C_2 wiederholen wir nun stets in jedem unserer neuen kleineren Quadrate bis ins Unendliche hin.

Zunächst die C_3.

Wie wir von C_1 zu C_2 durch Neunteilung der Quadrate übergingen, so gehen wir von C_2 zu C_3 durch neue Neunteilung der einzelnen Quadrate und ersetzen jede bisherige Diagonale durch einen gebrochenen Linienzug, der die ursprüngliche Figur C_2 im verkleinertem Maßstabe darstellt.





Ähnlich verfahren wir, um C_4 herzustellen und so

fort bis C_∞.

Wollen wir nunmehr dem Früheren entsprechend $y = y_3(t)$ zeichnen, so teilen wir das Intervall $0 \leq t \leq 1$ in 9 Teile und ebenso das Intervall $0 \leq y \leq 1$ und erhalten dann eine Kurve $y_3(t)$, die aus 27 geradlinigen Stücken besteht, deren jedes selbst wieder aus 3 einzelnen Stückchen (Gliedern) zusammengesetzt ist, so daß wir im ganzen 81 Glieder haben, entsprechend den 81 Diagonalstücken der Peano-Kurve.

Vergleichen wir übrigens y_3 mit y_2, so können wir y_3 auch so schildern:

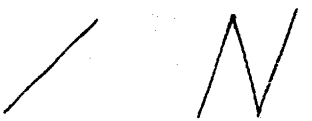
y_3 erwächst dadurch, daß man die Kurve y_2 seitlich auf 1/3 zusammendrückt und die entstehende Figur, bezw. ihr Spiegelbild an einer vertikalen Geraden dreimal alternierend nebeneinander stellt.

Die Kurve y_3 erwächst nun wieder, indem man die eben gezeichnete Kurve y_3, nachdem dieselbe in 1/3 Maßstab gezeichnet ist, diagonalweise ansteigend dreimal aneinander reiht.

Man kann aber auch y_3 aus y_2 ableiten, wo es dann gleich für y_n und y_{n+1} ausgesprochen heißt:

Um von y_n zu y_{n+1} (oder von y_n zu y_{n+1}) zu schreiten, da zerlege man erstlich jede geradlinige Seite von y_n (oder y_n) in 3 gleich lange Glieder und er-

setze dann jedes geradlinige Glied durch einen 3-zackigen Haken, der den selben Anfangs- und Endpunkt hat.



Wenn man dies so weiterführt, so erinnert das ganze Fortschreitungsgesetz für die Kurven y_n und y_n an die Verhältnisse der Peanokurve, nur daß statt der Sinusschwingungen hier geradlinig-zackige Schwingungen übereinander gelagert werden. Die Höhe dieser Zacken wird, je weiter wir mit dem Index gehen, immer unbedeutender, die Breite aber nimmt noch rascher ab, sodaß die Zacken ihrer Gestalt nach immer steiler und steiler werden.

Die Betrachtung dieser Bildungsgesetze zeigt insbesondere, daß die Kurven $x = y_n(t)$, $y = y_n(t)$ stetig sind und daß sie auch bei unendlich wachsendem n d. h. im Limes stetig bleiben.

Ich könnte nun versuchen, die Verhältnisse im Limes etwas genauer zu schildern.

Kennen wir Anfangs-, Endpunkt und die Stellen, in denen die verschiedenen Geraden aneinander stoßen, Gelenkpunkte (sodaß y_3 82 und y_3 244 Gelenkpunkte hat), so haben wir in diesen Gelenkpunkten ebensoviel Punkte, die den folgenden

Kurven unverändert angehören. Schließlich ist die Kurve γ_∞ resp. χ_∞ überall dicht von solchen Gelenkpunkten besetzt, die den verschiedenen C_n (mit endlichem n) entstammen.

Wir bekommen also ein vollständiges Bild der obigen Kurven γ_∞ und χ_∞, indem wir uns für obigen die Werte von n die jedesmaligen Gelenkpunkte der Kurven γ_n, χ_n konstruiert denken, die dann in ihrer Gesamtheit der Grenzkurve angehören und dieselbe, weil sie überall dicht aufeinanderfolgen, völlig festlegen.

Gehen wir nun auf die Peano-Kurve zurück, so entsprechen den Gelenkpunkten der Kurven γ und χ die Knickpunkte, in denen die Diagonalen sich unter rechtem Winkel aneinandersetzen und die im weiteren Verlauf der Kurve (soweit es sich um Knickpunkte im Innern des Quadrates handelt) zu Doppelpunkten werden. Die bei einer C_n auftretenden Knickpunkte bleiben bei allen folgenden C ungeändert erhalten, nur deren immer zahlreichere werden dazwischen gesetzt. Schließlich decken die Knickpunkte der Quadrat überall dicht, die Kurve C_∞ füllt aber das Quadrat überhaupt aus, indem ihr jeder Punkt angehört, der

sich als Verdichtungsstelle der unendlich vielen Knickpunkte darstellt.

Soviel über die Peano-Kurve. Es entsteht nun, mehr folgende natürliche Fragestellung:

Die Peano-Kurve ist doch nichts dem ähnlich, was man im gemeinen Leben eine Kurve nennt. Wie muß ich daher die Definition $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ einer Kurve einengen, resp. welche Haupteigenschaften muß ich von einer so definierten Kurve verlangen, damit wir ein Analogon zur empirischen Kurve erhalten?

Dies hat in einfacher Weise C. Jordan in seinem Cours d'analyse beantwortet:

Unsere Peano-Kurve hatte unendlich viele Knickpunkte und damit auch unendlich viele Doppelpunkte d. h. es lagen die Argumente t im Intervalle $0 \leq t \leq 1$, für welche ein Doppelpunkt eintrat, überall dicht. C. Jordan verlangt nun, daß die durch die Formeln $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ definierte Kurve im Intervall $a \leq t \leq b$ keinen Doppelpunkt besitzt d. h. daß keine zweite Werte t_1, t_2

$$a \leq t_1 \leq b \quad , \quad a \leq t_2 \leq b$$

existieren, so daß

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \qquad \psi(t_1) = \psi(t_2) \qquad \text{ist.}$$

Ausserdem nimmt er der Einfachheit halber an, daß $\varphi(a) = \varphi(b)$, $\psi(a) = \psi(b)$ sei, d. h. daß wir eine geschlossene Kurve haben. Und von der so definierten „Kurve" zeigt C. Jordan, daß sie die Ebene in 2 Teile einen äußeren und einen inneren teilt, wie wir dies von der empirischen Kurve her gewöhnt sind.

Wir mögen noch so sagen:

Das Paradoxe bei der Peano-Kurve liegt durchaus nicht in der Sache sondern in der Ausdrucksweise, daß wir nämlich bei ihr das Wort „Kurve" in einem allgemeineren Sinne gebrauchen, als zulässig ist, wenn wir die Analogie mit der empirischen Kurve festhalten wollen.

Um den Gegensatz der Jordanschen Entwicklungen so klar wie möglich zu machen, will ich vorab nicht von einer Jordan-Kurve, sondern einer Jordanschen Punktmenge sprechen, von der wir dann zeigen, daß sie, was die Zusammenhangsverhältnisse betrifft, mit den gewöhnlichen Kurven der empirischen Geometrie übereinstimmt.

In der Tat sagt man kurzweg:

Jede durch $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ definierte Kurve, die der Jordanschen Bedingung genügt, wenn die Ebe-

ne in einen äusseren und inneren Bereich, so klingt es trivial. Der Grund hierfür liegt darin, dass man das Wort Kurve hierbei unwillkürlich in zweierlei Bedeutung auffasst. Vielmehr sollte man ausführlicher folgendermassen sagen.

Ausgehend von dem empirischen Gebiete, wo es einfach klar ist, dass jede geschlossene Kurve die Ebene in einen äusseren und inneren Bereich trennt, haben wir zu fragen:

Wie ist im Idealgebiete die Definition einer Punktmenge $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ einzuschränken, damit wir einen analogen Satz erhalten?

Und die Antwort ist:

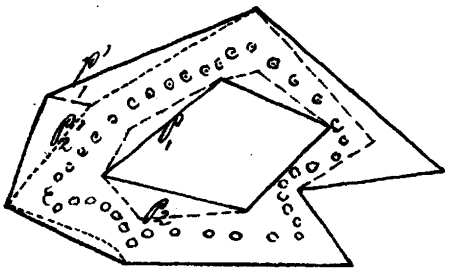
Zu dem Zwecke sind $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ den Jordanschen Bedingungen zu unterwerfen.

Hinterher mag man dann eine solche Punktmenge eine Kurve nennen!

Damit ist die Bedeutung des Satzes selber gegeben.

Was den Beweis angeht, so referire ich nur kurz die Hauptgesichtspunkte, da man die genaue zu überlegen den Details besser am genannten Orte nachliest.

Wir denken uns eine Punktmenge gegeben $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, die den Jordanschen Bedingungen entspricht. C. Jordan beginnt dann damit eine Reihe evan-



der umschliessender geradliniger Polygone $P_1, P_2, P_3 \ldots$ (von stets wachsendem Flächen-inhalt) zu konstruie-ren, welche im Innern keinen Punkt der Menge ent-halten (wo also $P_1 < P_2 < P_3 \ldots$) und zweitens eine andere Reihe von Polygonen, in deren Äussern kein Punkt unserer Menge zu finden ist und wo für diese (unendlich ausgedehnten) äusseren Inhalte $P'_1 > P'_2 > P'_3 \ldots$. Dass ein derartiges geradliniger Polygon die Ebene in 2 Bereiche teilt, wird nun aus der Elementar-geometrie als bekannt angenommen.

Nachdem man diesen allgemeinen Gedanken hat, wird dann weiter gezeigt, dass jeder Punkt, der der Men-ge nicht angehört, in einen der Flächeninhalte P bezw. P' hineinkommt und dass schliesslich die Punkte unserer Menge selbst als Grenzpunkte der immer sich nähernden Inhalte bezw. Polygone P und P' übrig bleiben.

Bei diesem Beweisgange bildet also die Annähe-rung von den empirischen Kurven ein hodegetischer Prinzip. Jede einzelne Aussage ist aber logisch auf Axiome zu stützen, wobei sich als Kern der

moderne Zahlbegriff entspricht.

Das Resultat kann auch so gefasst werden: Für die Grenze der Polygonumfänge gilt, was für die Polygonumfänge selbst gilt.

Man kann den Jordan'schen Satz mit dem zu Anfang der Vorlesung mitgeteilten Satz von Cauchy parallelisieren, dass eine stetige Funktion zwischen zwei Werten, die sie annimmt, auch alle Zwischenwerte annimmt. Genau so errichtet die Jordan-Kurve zwischen ihrem Innern und Äussern eine lückenlose Schranke.

Aus dem Vorherigen ist klar, dass wir unsere Jordan'sche Punktmenge, war die Zusammenhangsverhältnisse betrifft, mit dem Namen Kurve belegen können. Wird sie aber auch in anderen Berichungen Analogieen mit der gewöhnlichen Kurve aufweisen?

Mit andern Worten:

Können wir bei der Jordan-Kurve von Bogenlänge, Tangente, Krümmungsradius sprechen, oder welche Einschränkungen betreffend die φ, χ müssen noch hinzukommen, damit dies möglich ist? (Natürlich müssen dann bei der Punktmenge der Präzisionsgeometrie statt der nur angenäherten Auffassung im empirischen Gebiet entsprechende

scharfe Definitionen zugrunde gelegt werden).

Wir gehen zunächst auf die Frage nach der Bogenlänge ein

Wir teilen das Intervall $a \ldots b$

für t in beliebig kleine Teile $\Delta_1 t, \Delta_2 t, \ldots$ und bekommen diesen Zuwächsen entsprechend bei x und y die Incremente $\Delta_1 x, \Delta_1 y$; $\Delta_2 x, \Delta_2 y, \ldots$. Diese Punkte einer Jordan'schen Menge verbinden wir geradlinig, sodaß die Länge der aufeinanderfolgenden Stücke

$$\sqrt{\Delta_1 x^2 + \Delta_1 y^2}\ ;\quad \sqrt{\Delta_2 x^2 + \Delta_2 y^2}\ ;\quad \ldots$$

wird. Wir legen nun unserer Punktmenge eine Bogenlänge bei, wenn der Umfang des so konstruierten geradlinigen Polygons d. h.

$$\sum_\nu \sqrt{\Delta_\nu x^2 + \Delta_\nu y^2}$$

für den Fall, daß man das Intervall der z-Axe in immer zahlreichere und unbeschränkt kleiner werdende Teile zerlegt, einem bestimmten Limes zustrebt.

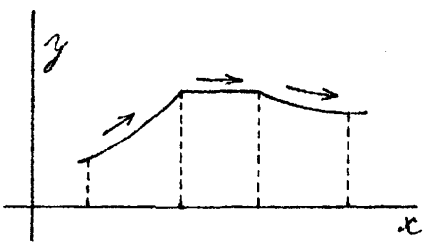
Daß dies ohne weiteres nicht nötig, sehen wir an dem Beispiele der Peano-Kurve, bei der doch unsere Frage nach der Bogenlänge, nachdem wir einmal die Kurve durch einen Parameter t dargestellt haben, durch die vorhandenen Doppelpunkte nicht alteriert wird.

Hier haben wir für C_1 die Länge $\sqrt{2}$, für C_3 $3\sqrt{2}$, $C_3 = 9\sqrt{2}$, ... und es ist sonach klar, daß der Umfang der successiven geradlinigen Polygone C_n, die je in die Gelenkpunkte unserer unendlichen Punktmenge eingespannt sind, mit wachsender Seitenzahl keinesweges einem endlichen Limes entgegengeht, sondern über alle Grenzen wächst.

Auch hier will ich die Beschränkungen, die wir den Funktionen φ und χ auferlegen müssen, damit der Jordan'schen Punktmenge eine Bogenlänge zukommt, ohne Beweis angeben, indem ich nur auf den springenden Punkt aufmerksam mache.

Ich führe zunächst zwei Benennungen ein, die von den Mathematikern nicht gerade glücklich gewählt sind, weil sie im gewöhnlichen Leben gewisse feste Bedeutungen besitzen, die aber je länger je mehr in allgemeinen Gebrauch kommen.

Zunächst sagt C. Neumann von einer Funktion sie wachse in einem Intervall monoton, wenn sie in dem betreffenden Intervall in keinem noch so kleinem Stücke konstant ist oder abnimmt.



Des Weiteren spricht C. Jordan von einer Curve

fen Funktion:

Im Allgemeinen kann eine Funktion in einem Intervall unendlich oft zu- und abnehmen. Eine Funktion heißt nun kornierd, wenn die Summe der positiven Zuwächse für sich und auch die Summe der negativen Zuwächse für sich genommen endlich ist.

Wir fragen wieder: Ist uns ein Beispiel einer nicht-kornierten Kurve bekannt?

Ich erinnere an die beiden Funktionen φ und ψ, die wir bei dem Beispiel der Peano-Kurve als Grenzen geradliniger gezackter Kurvenzüge konstruierten. Hier ist sofort gewiß, durch ersichtlich, daß die Summe der aufsteigenden, wie absteigenden Äste für sich unendlich ist.

War nun die Bogenlänge einer Jordan-Kurve betrifft, so beweist C. Jordan, daß eine solche im Sinne unserer Definition herauskommt dann und nur dann, wenn φ und ψ kornierte Funktionen sind.

Fragen wir weiter, wann die Jordan-Kurve eine Tangente bezw. Krümmung besitzt, so können wir jedenfalls eine hinreichende Bedingung angeben:

Damit nämlich unsere Punktmenge an jeder Stelle eine Tangente und Krümmung besitzt, ist jedenfalls ausreichend, dass φ und χ bezw. einmal oder zweimal im Intervalle differentierbar sind[1].

Wenn alle unsere genannten Einschränkungen:

1) φ und χ im Intervalle stetig,
2) ohne Doppelpunkte,
3) φ und χ korniert,
4) r-mal differentierbar,

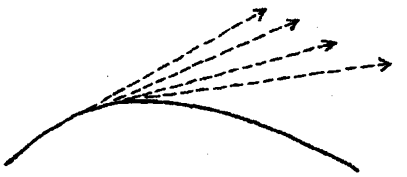
für unsere Punktmenge erfüllt sind, dann wollen wir sie in Hinsicht auf die analogen Eigenschaften bei der empirischen Kurve kurzweg als Kurve bezeichnen. Soll aber der Gegensatz zu der Peano-Kurve und ähnlichen Gebilden betont werden, so werden wir von ihr als einer regulären Kurve sprechen. Oder noch präziser:

Wir nennen die so definierte Punktmenge zunächst ein reguläres Kurvenstück, wo dann eine reguläre Kurve aus endlich vielen solcher Stücke zusammengesetzt sein wird und damit dann auch wieder Doppelpunkte (in endlicher Zahl) besitzen kann.

---

[1] Es ist dies nicht notwendig, weil ich eventuell einen Parameter t, für den dies der Fall ist, durch einen anderen Parameter $t_1 = f(t)$ ersetzen kann, für den es nicht stimmt. Ich habe nur $f(t)$ als zwar monoton wachsende, stetige, aber nicht differentiierbare Funktion einzuführen.

Ich füge noch hinzu, daß man auch vielfach ein reguläres Kurvenstück als ein solches bezeich-



net, das jedenfalls eine Tangente besitzt und die Eigenschaft, daß die Tangente beim Fortschreiten entlang der Kurve sich monoton dreht (in dem ein oder anderen Sinne), (was noch nicht soviel verlangt, wie das Vorhandensein eines Krümmungsradius. Wir werden überhaupt unserer Definition der regulären Kurve eine gewisse Elastizität lassen, indem wir unsere Anforderungen an die Zahl der existierenden Differentialquotienten von x, y bezw. die Konvolvente der höchsten existierenden Differentialquotienten jeweils den Verhältnissen anpassen.)

Im Übrigen erinnere ich an die entsprechenden Entwicklungen des ersten Teils dieser Vorlesung, die sich nur dadurch unterscheiden, daß wir uns auf Punktmengen beschränkten, die sich in der Form $y = f(x)$ darstellen ließen. Wenn wir nach der jetzt gewählten Ausdrucksweise eine reguläre Kurve haben, so sprachen wir damals entsprechend von einer „vernünftigen" Funktion.

Wir fragen weitergehend:

Welche Beziehung besteht zwischen den analytischen

definierten Gebilden der Präzisionsmathematik und dem, was wir im empirischen Gebiet kurzweg „Kurve" nennen.[2]

Um hier Undeutlichkeiten in der Sprechweise zu vermeiden, die dadurch hervorkommen, daß wir beide mal dasselbe Wort Kurve gebrauchen, und um anderer, reits mich kurz auszudrücken, will ich fortan in der Präzisionsmathematik von der Idealkurve, der wir gegebenenfalls das Attribut „regulär" geben, im empirischen Gebiete von der empirischen Kurve reden.

Ich behaupte:

Man wird zu einer empirischen Kurve allemal eine reguläre Idealkurve sich hinzu denken können, die mit ihr in allen wesentlichen Attributen, die wir oben bei den Kurven $y = f(x)$ zur Sprache brachten, übereinstimmt, nämlich soweit übereinstimmt, als dies überhaupt wegen der beschränkten Genauigkeit der empirischen Verhältnisse möglich ist.

Den Beweis denke ich mir in der Weise geführt, daß ich annehme, es sei möglich, die empirische Kurve in eine endliche Anzahl solcher Stücke zu zerlegen, welche, je auf ein geeignetes Koordinatensystem bezogen, durch eine Formel $y = f(x)$ — auch was Richtung und ev. Krümmung angeht — mit

hinreichender Annäherung dargestellt werden können (vergl. die Auseinandersetzungen auf pg 103 ff.) Wir haben also eine endliche Zahl von Koordinatenpaaren

$$x_1 y_1 \ , \ x_2 y_2 \ , \ \ldots \ . \ x_n y_n$$

und in jedem derselben ein reguläres Stück einer Integralkurve:

$$y_1 = f_1(x_1) \ , \ y_2 = f_2(x_2) \ , \ \ldots \ . \ y_n = f_n(x_n) \ ;$$

diese Stücke schliessen sich (vermöge der gegenseitigen Lage der Koordinatensysteme) mit Endpunkt und Anfangspunkt aneinander, sodass ein zusammenhängender Zug vorliegt. Wir führen jetzt ein einheitliches Koordinatensystem XY und einen Parameter t ein, dessen in Betracht kommenden Intervall wir in n Teilintervalle zerlegen. Liegt t im ersten Teilintervall, so nennen wir es t_1, liegt es im zweiten, t_2 u. s. w. fort. Die Kunst ist dann, die n Formeln:

$$y_1 = f_1(x_1) \ , \ y_2 = f_2(x_2) \ . \ \ldots \ . \ y_n = f_n(x_n)$$

zu einem einzigen Formelpaar

$$x = \varphi(t) \ , \ y = \psi(t)$$

derart zu verschmelzen, dass für $t = t_1$ das Stück $y_1 = f_1(x_1)$, für $t = t_2$ das Stück $y_2 = f_2(x_2)$, ... dargestellt wird. Und gleichzeitig sollen φ, ψ in

diesen Teilintervallen ebenso oft nach t differentiierbar sein, wie beziehungsweise f_1 nach x_1, f_2 nach x_2, ... Dies aber wird sich in einfachster Weise durchführen lassen, wenn wir

$$t_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 \quad , \quad t_2 = \alpha_2 x_2 + \beta_2 \quad , \ldots \quad —$$

setzen und die Konstanten α, β hier so bestimmen, dass der Endwert von t_1 (der dem grössten Wert von x_1 entspricht) mit dem Anfangswert von t_2 (der dem kleinsten Wert von x_2 entspricht) zusammenfällt, ebenso der Endwert von t_2 mit dem Anfangswert von t_3 u. s. w. —

Die hiermit skizzierte Entwicklung lässt die Möglichkeit offen, dass die verschiedenen Idealkurvenstücke $y_1 = f_1(x_1)$, $y_2 = f_2(x_2)$, ..., die wir aneinander reihten, in ihren gemeinsamen Punkten verschiedene Richtungen, bezw. Krümmungen darbieten. Dem entsprechend wird die vorgelegte empirische Kurve singuläre Punkte (d. h. Punkte, in denen sich ihre „empirische" Richtung oder Krümmung sprungweise ändert) in endlicher Zahl besitzen dürfen. Die resultierende Idealkurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ist dann natürlich mit den entsprechenden Singularitäten behaftet.

Wir mögen den vorstehenden Überlegungen noch

ihre Umkehr hinzufügen, indem wir fragen: welche Eigenschaften der regulären Idealkurven $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ kommen für das empirische Gebiet in Betracht?

Ersichtlich alle diejenigen, die erhalten bleiben, wenn wir die φ, χ innerhalb solcher Grenzen, die im einzelnen Falle vorgegeben sind, beliebig abändern, d. h. diejenigen Eigenschaften, von denen die Approximationsmathematik handelt. Man kann diese Aussage dadurch in eine anschauliche Form bringen, daß wir uns um jeden Punkt der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ mit einem vorgegebenen kleinen Radius ρ einen Kreis beschrieben denken. Die Gesamtheit der solcherweise entstehenden Kreisflächen wird einen bestimmten Streifen der Ebene überdecken und es sind die geometrischen Eigenschaften der so definierten Streifen, nicht diejenigen der Idealkurven selbst, welche im empirischen Gebiet zur Geltung kommen.

Hier ist nun auch der Ort um, gestützt auf die Kenntnisse, die wir inzwischen erworben haben, auf die Frage nach der Genauigkeit unserer Raumvorstellung (die wir gleich zu Anfang dieser Vorlesung berührt haben) zurückzukommen.

Sei bezüglich eines Koordinatensystems x, y einerseits ein Kreis, andererseits eine Peano-Kurve durch die zugehörigen Formeln $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ definiert. Besteht hinsichtlich unserer Fähigkeit, uns die so definierten Gebilde räumlich vorzustellen, in den beiden Fällen ein prinzipieller Unterschied? Ich glaube es nicht. Beidemal können wir uns durch Fixierung der Aufmerksamkeit auf einzelne Werte von t die Lage einzelner Punkte der in Betracht kommenden Gebilde in Gedanken, aber immer nur mit beschränkter Genauigkeit, festlegen; wir können uns auch, indem wir uns solcherweise benachbarte Punkte fixiert denken, mit beschränkter Genauigkeit die Richtung der Verbindungslinie vorstellen; aber an das Idealgebilde selbst kommen wir weder das eine Mal noch das andere Mal mit unserer Vorstellungskraft heran. Die mathematischen Überlegungen, durch die wir das Idealgebilde beherrschen, werden durch die Raumanschauung belebt und dirigiert, aber sie stützen sich in letzter Linie auf die durch die Formel $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, gegebene Gesetzmässigkeit unter Zugrundelegung der ebenfalls über die unmittelbare Vorstellungskraft hinausgehenden Axiome.

Dies ist meine Theorie von 1873. Ich möchte nun, sehen, dass sich Physiologen und Psychologen dazu äussern. Vorbedingung müsste nur sein, dass die Herren die modernen Entwickelungen der Präzisionsmathematik, etwa soweit, wie sie in dieser Vorlesung zur Sprache kommen, durchgedacht und sich zu eigen gemacht haben. So lange man nicht einzelne Beispiele von Idealkurven ohne Differentialquotienten, wie die Weierstrass-Kurve oder die Peano-Kurve, eingehend überlegt hat, ist es müssig, über den Unterschied dieser Idealkurven von den gewöhnlich allein betrachteten Idealkurven mit Differentialquotienten in eine philosophische Discussion einzutreten. –

Wir wenden uns nunmehr zu einer kurzen Besprechung der <u>hauptsächlichsten Arten von Idealkurven</u>, welche die präzisionsmathematische Behandlung bevorzugt.

1) <u>Wann nennen wir eine reguläre Idealkurve analytisch</u> d.h. welche einschränkende Bedingungen müssen zur Definition der regulären Idealkurve hinzutreten, damit wir sie analytisch nennen? Eine reguläre analytische Idealkurve bezeichne ich weiterhin kurz als analytische Kurve!)

Wir werden sagen:

Eine reguläre Idealkurve heißt analytisch, wenn x und y durch konvergente Potenzreihen von t dar„ stellbar sind.

Und weshalb beschäftigen sich die Mathematiker fast ausschließlich mit den analytischen Kurven, nachdem sie doch längst wissen, daß damit bei weitem nicht alle Kurven erschöpft sind.[2]

Der Grund liegt in den schönen Eigenschaften, die die analytischen Kurven besitzen: Zunächst sind sie auf komplexes $t = u + iv$ verallgemeinerungsfähig. Es kommt hier also die ganze Funktionentheorie (komplexer Veränderlicher) heran (die Potenzreihen konvergieren gleich in einem Bereiche der uv-Ebene). Insbesondere gestattet die „analytische Fortsetzung" zu neuen Definitionsgebieten fortzuschreiten, also, soweit diese Gebiete reelle Werte von t mit umfassen, zu neuen Kurvenstücken gesetzmäßig fortzuschreiten.

Abschließend sage ich:

Eine analytische Kurve ist der Inbegriff aller der analytischen Fortsetzungen, die sich an das erste Stück nach den Regeln der Funktionentheorie (eines komplexen Argumentes) ergeben, sie stellt sich als ein gesetzmäßiges Ganze dar, welches durch sein kleines erstes Stück vollständig bestimmt ist. Und die hier„

mit bereichnete Gesetzmäßigkeit: — daß das kleinste Stück das Ganze bestimmt —, ist es, welche die analytische Kurve zum Lieblingsgegenstande der Mathematiker macht.

Der Bestimmtheit halber füge ich noch hinzu:

Eine analytische Kurve kann auch singuläre Punkte der verschiedensten Art haben; man erhält dieselben, wenn man annimmt, daß in den Reihenentwickelungen für φ und ψ

$$x = \varphi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$
$$y = \psi(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$$

Reihen von Gliedern niederster Ordnung fortfallen und man die Verhältnisse bei $t = 0$ betrachtet.

2) Wir gehen nun weiter in der Einschränkung des Kurvenbegriffs, indem wir von den analytischen Kurven zu den algebraischen fortschreiten.

In dem Vorland liegt schon drin, daß eine analytische Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ algebraisch heißt, wenn φ und ψ identisch eine algebraische Gleichung $F(\varphi, \psi) = 0$ befriedigen.

Es gilt aber auch der umgekehrte Satz:

„Wenn eine algebraische Gleichung $F(x y) = 0$ vorgelegt ist, dann kann man für die Umgebung jeder Stelle x_0, y_0 eine Hülfsvariable t so einführen, daß

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ wird, wo φ und ψ konvergente, nach ganzen Potenzen fortschreitende Reihenentwickelungen sind."

Ich beweise dies nicht, sondern führe den Satz nur in möglichst bestimmter Fassung an, indem es sich für mich ja hier nur darum handelt, einen allgemeinen Überblick über die Sache zu geben.

Die weitere Frage ist nun:

Läßt sich ausser dieser formalen Definition der algebraischen Kurve eine mehr sachliche Definition geben d. h. eine Definition, die sich anschaulich fassen läßt?

Dies gelingt in der Tat sowohl funktionentheoretisch, wie auch geometrisch.

Zunächst funktionentheoretisch: Wir stellen uns durch Elimination von t die Funktion $y = f(x)$ her und die Frage ist, ob die algebraische Funktion $y = f(x)$ hinsichtlich der zu den einzelnen Werten von x gehörigen Potenzentwickelungen besonders charakteristische Eigenschaften besitzt, die die algebraische Funktion von anderen analytischen Funktionen unterscheiden. Dabei müssen wir natürlich x als komplexe Veränderliche fassen, da nur dann die Aussagen der Funktionentheorie ihr genuines Substrat finden.

In der Tat läßt sich nun y funktionentheoretisch als algebraische Funktion von x dadurch definieren, daß man verlangt: a) es solle für den einzelnen Wert von x nur eine endliche Anzahl von Werten y vorhanden sein und b) es solle sich y nach Potenzen von $(x - x_0)$ in der Umgebung jeder Stelle x_0 so entwickeln lassen, daß dabei keine unendliche Zahl negativer Potenzen auftritt (wodurch sogenannte wesentliche Singularitäten ausgeschlossen sind). Die genaue Darlegung gehört natürlich in eine Vorlesung über Funktionentheorie.

Interessanter und leichter verständlich als diese funktionentheoretische Digression ist der Anschluß an die geometrische Auffassungsweise.

Auf die Frage nach den geometrisch charakteristischen Eigenschaften der algebraischen Kurve hat bereits vor 50 Jahren Grassmann die entscheidende Antwort gegeben. Leider ist seine Auffassung auch heute noch nicht in die Lehrbücher übergegangen.

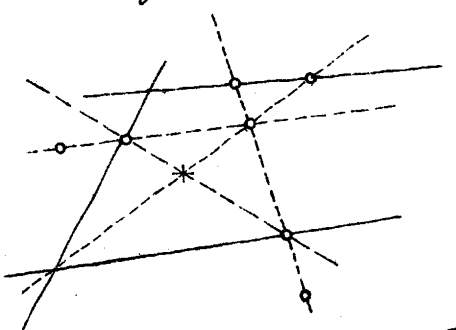
Ich gebe gleich Grassmann's Satz, indem ich dabei das Wort: „linealer Mechanismus" benutze:

Eine Kurve heißt algebraisch, wenn sie durch einen linealen Mechanismus erzeugt werden kann.

Zunächst, was heißt linealer Mechanismus?

Ein lineales Mechanismus ist ein bewegliches System von geraden Linien (von denen nur die Eigenschaft geradlinig zu sein, benutzt wird, also nicht die Eigenschaft, die eine materielle Gerade gleichfalls hat, als Streckenabträger dienen zu können) und Punkten, wobei die geraden Linien gezwungen sind, durch bestimmte Punkte zu gehen, und die Punkte gezwungen sind, auf bestimmten Geraden sich zu bewegen.

Denken Sie sich eine Anzahl von Geraden und Punkten gegeben, es sollen dann aus diesen Elementen nur durch Ziehen von Verbindungsgeraden und Schneiden der



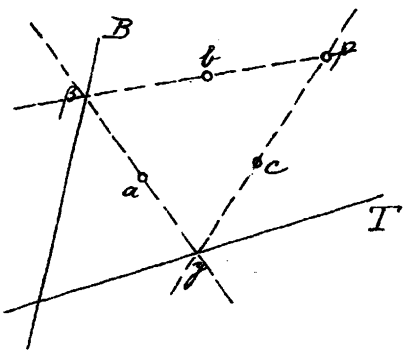
nunmehr vorhandenen Geraden neue Gerade und Punkte abgeleitet werden! Wir werden uns darauf hin so ausdrücken können:

Unter einer linealen Konstruktion nach Steinam versteht man die Ableitung von neuen Punkten und Geraden aus den gegebenen nur mit Hülfe des Lineals. Zum linealen Mechanismus wird die lineale Konstruktion, wenn sie sich schließt, d.h. zum Anfangselement zurückführt.

Ich erläutere etwa, wie die Kegelschnitte durch einen

linealen Mechanismus gewonnen werden können:

Wir geben 3 Punkte a, b, c und 2 Geraden B, T. Es wird dann ein Kegelschnitt erzeugt, wenn man verlangt, daß die Punkte β und γ, die in der Figur aus dem Punkte p linear (durch Ziehen von bp und cp) abgeleitet sind, mit dem gegebenen Punkte a auf einer geraden Linie liegen (Maclaurin's Erzeugung).



Man wird sich geraden aus starren Drähten, am besten Stricknadeln, einen Apparat gebaut denken, sodaß der Punkt p fortgesetzt der geschilderten linealen Bedingung genügt, also sich auf einem Kegelschnitt bewegt. Das ist dann ein linearer Mechanismus. Überhaupt aber wird man einen linealen Mechanismus ein solches bewegliches Aggregat von geraden Linien und Schnittpunkten derselben nennen, welches zur Folge hat, daß 3 von dem Punkte p abhängige Punkte auf einer Geraden liegen, oder auch 3 von dem Punkte p abhängige Geraden durch einen Punkt gehen.

Die linealen Mechanismen haben übrigens nur theoretisches, kein praktisches Interesse, weil die

Ausführung nicht genau gemacht werden kann, vielmehr der Apparat, den man konstruieren mag, schlottert (vergl. die Bemerkungen zum Pascal'schen Sechseck in der Vorlesung über projektive Geometrie W. S. 1906/07)*). —

Dieser Idee des linealen Mechanismus hat sich nun Grassmann bedient, um eine algebraische Kurve allgemein zu definieren.

Bei der Kegelschnitterzeugung, wo es sich also um die Erzeugung einer algebraischen Kurve 2ter Ordnung handelt, wird der Punkt p zweimal benutzt. Grassmann findet, dass er eine algebraische Kurve nter Ordnung bekommt, wenn er den Mechanismus so einrichtet, dass der Punkt p n - mal benutzt wird.

Hier ist er aber nicht stehen geblieben, sondern er zeigt auch umgekehrt, dass man jede algebraische Gleichung nter Ordnung $F(x\,y) = 0$ durch einen (ev. sehr komplizierten) linealen Mechanismus ersetzen kann, bei welchem also der Punkt x y n - mal vorkommt. Er macht das so, dass er geradezu die Gleichung $F(x\,y) = 0$ in die Vorschrift für die Bauart eines solchen Mechanismus umsetzt.

Nachdem wir diesen Satz haben, folgt unmittelbar die bereits oben gegebene, rein geometrische De-

*) Nicht autographiert!

finition der algebraischen Kurven nach Grassmann:
Eine algebraische Kurve n^ter Ordnung ist eine solche Kurve, welche durch einen linealen Mechanismus n^ter Ordnung erzeugt wird.

Wieder fragen wir, wo das besondere Interesse der algebraischen Kurven liegt.

Natürlich gilt auch für sie (wie für die analytischen Kurven überhaupt), dass sie in ihrer ganzen Ausdehnung durch das Verhalten auf einem noch so kleinem Stück festgelegt sind. Darüber hinaus haben sie aber noch weitere einfache Eigenschaften, die sich auf ihren Gesamtverlauf beziehen. Um nur das Wichtigste anzuführen:

Sie bestehen aus einer endlichen Anzahl von Ästen und es gilt für sie das Bézout'sche Theorem, d. h. eine algebraische Kurve n^ter Ordnung wird von einer Geraden in n Punkten geschnitten und zwei verschiedene algebraische Kurven C_m und C_n schneiden sich in m.n Punkten (vorausgesetzt, dass man richtig zählt d. h. die imaginären Schnittpunkte, eventuelle Punkte im Unendlichen und jeden einzelnen mit der richtigen Multiplizität in Rechnung bringt, und dass man von den Fällen absieht, wo die Kurven ganze Äste gemein haben).

Insbesondere ergeben sich nun auf Grund dieser allgemeinen Sätze, besonders für die Kurven niederer Ordnung 1, 2, 3 und 4, wunderschöne Theoreme, welche eine Beschäftigung mit diesen Kurven zu einem reizvollen Vergnügen machen und geradezu einen ästhetische Befriedigung in sich schliessen.

Infolgedessen ist ja die Beschäftigung mit den algebraischen Kurven ein Lieblingsgegenstand des mathematischen Studiums geworden. Aber man muß es doch als Einseitigkeit bezeichnen, wenn nur von algebraischen Kurven die Rede ist, wie in so manchen Lehrbüchern. Man gewinnt dort geradezu den Eindruck, als ob es nur diese gäbe, während doch die Sinuslinie, Schraubenlinie noch viel öfter auftretende, mindestens eben so schöne, aber keine algebraischen Kurven sind.

Noch spezieller als die algebraischen Kurven sind <u>die rationalen Kurven</u>. Hier geht man wieder von $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ aus, indem man annimmt, daß φ und ψ rational in t sind. Auch mit ihnen sich zu beschäftigen, hat man vielfach Anlaß gehabt.

Nachdem wir so die Spezialisierung verfolgt haben, die der Kurvenbegriff im Gebiete der Präzisionsmathematik findet, fragen wir unserer allgemeinen

Fragestellung getreu:

Was haben die verschiedenen Idealkurven mit den Anwendungen zu tun?

Der alte Satz ist, daß in den Anwendungen nur analytische Kurven vorkommen. Wir stellen dement. gegen, daß in den Anwendungen überhaupt keine Idealkurven, sondern nur Annäherungen an solche (d. h. Streifen) zur Geltung kommen. Ferner aber, wenn man eine Idealkurve heranziehen will, um eine empirische Kurve resp. Erscheinung nach ihrer scheinbaren Kontinuität zu schildern, dann reicht man, sagen wir, immer mit regulären Kurven (d. h. den Kurven, bei denen y und y endlich oft differentiierbar sind und die letzten Differentialquotienten vielleicht noch abteilungsweise monoton sind) aus und es ist Metaphysik, wenn man statt derselben glaubt analytische Kurven heranziehen zu müssen. Ich nenne hier Metaphysik, was jenseits der unmittelbaren Erfahrung liegt, was man einführt, weil man sich obere Grundsätze macht, vermöge deren es wünschenswert erscheint, nur analytische Kurven zu benutzen.

Übrigens wird die somit aufgestellte Behauptung, daß analytische, algebraische, rationale Kur-

ven als solche nichts mit den Anwendungen zu tun haben, durch den Umstand etwas abgemildert, daß die einfachsten regulären Kurven, die man kennt, tatsächlich analytisch sind.

Hat man z. B. den Ansatz:

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$
$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2,$$

(den man der Einfachheit halber allemal heranzieht, wenn man im empirischen Gebiete eine einzelne Kurvenlinie darzustellen hat), so haben wir zufällig eine rationale Kurve getroffen. Ebenso wird man in den Anwendungen nie auf die Formeln $y = \sin x$, $y = l^x$, ... verzichten wollen, auch wenn noch Korrektionen zutreten, die den analytischen Charakter der Kurve verwischen. Wir können also der obigen Behauptung folgendes Corollar folgen lassen:

Analytische, algebraische, rationale Kurven treten nur insofern im empirischen Gebiet auf, als in der Tat die einfachsten regulären Kurven, die man kennt und die man zur approximativen Darstellung empirischer Daten immerzu heranzieht, analytische, algebraische, rationale Kurven sind.

Ich möchte hier einige Worte über das Buch:

J. Perry: The calculus for engineers, London 1897, deutsch von R. Fricke u. Fr. Süchting, Leipzig 1902. einfügen, in welchem der Gedanke, den ich hier berühre, charakteristisch zur Geltung kommt.

Das Buch ist dadurch ausgezeichnet, dass der Verfasser, der für Praktiker schreibt, sich vollkommen auf den Standpunkt des Praktikers stellt. Er spricht nicht von dem allgemeinen Kurvenbegriff u. s. w. sondern beginnt gleich damit, dass in der Praxis eigentlich nur 3 fundamentale Funktionen ($y = x^n$, $y = e^x$, $y = \sin x$) in Betracht kommen, und dass man alle Aufgaben der gewöhnlichen Praxis mit genügender Genauigkeit lösen kann, wenn man nur noch solche Funktionen zulässt, welche aus den gegebenen drei durch eine endliche Anzahl von Anwendungen der 4 Species herauskommen, z. B.

$$y = \frac{a + bx + cx^2}{d + ex + fx^2}, \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Auffassung von Perry ist vielfach als unwissenschaftlich bezeichnet worden. Dies ist sie aber auf ihrem Gebiete gar nicht. Es ist gerade der Zweck der gegenwärtigen Vorlesung den Standpunkt so zu wählen, dass auch Perry's Ideen in dem Gebäude, das gleichzeitig das ideale und empirische Gebiet umschließt, Platz finden.

II, 2 Fortsetzung der präzisionsmathematischen Betrachtungen zur ebenen Geometrie.

Ich nehme nunmehr einen Gedanken auf, den wir schon früher einmal berührt haben (womit ich mich wieder ganz dem idealen Gebiete zuwende).

Wir haben unsere ganze Entwickelung an die Ideenbildungen der analytischen Geometrie angeknüpft, und also im letzten Grunde alles auf den modernen Zahlbegriff gestützt. Will man die bisher besprochenen Dinge von dieser Darstellungsweise ablösen und auf rein geometrischer Basis behandeln (was durchaus möglich ist), so wird man ein Axiom an die Spitze stellen müssen, das der Einführung des modernen Zahlbegriffs entspricht und so gefaßt werden kann, daß ein unbegrenzt kleiner werdendes Stück der Ebene oder auch einer ebenen Idealkurve in der Grenze einen bestimmten Punkt definiert.[1]

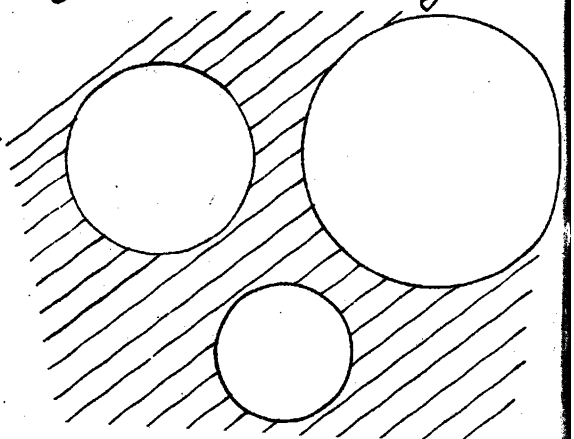
Diese Bemerkung mögen Sie als theoretische Grundlage dessen wählen, was ich jetzt ausführe.

Wir sahen schon früher, daß man in der Theorie der automorphen Funktionen dazu geführt wird, Punktgruppen zu definieren und zu studieren, die alle die merkwürdigen Eigenschaften besitzen,

[1] Die Beschränkung auf ebene Geometrie wird hier selbstverständlich nur aus Gründen der Raumökonomie festgehalten.

welche die Mengentheoretiker zu betrachten pflegen.

Jetzt will ich durch eine kleine Modifikation des selben geometrischen Erzeugungsprinzipes zu nicht analytischen Kurven fortschreiten (die hier also rein geometrisch erzeugt werden, wodurch zugleich der Eindrucke vermieden wird, als ob durch die Betrachtung nicht-analytischer Kurven etwas Künstliches und ihr Fremdes in die Geometrie hineingetragen würde).

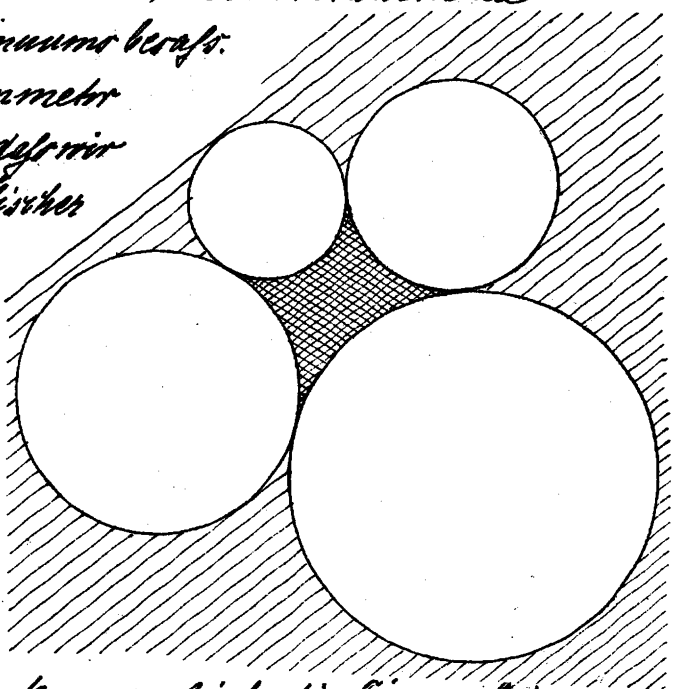


Wir gingen bei unseren früheren Betrachtungen von 3 oder mehreren Kreisen in der Ebene aus, die ganz auseinander liegen, und invertierten den von ihnen gemeinsam begrenzten Fundamentalbereich und alle aus ihm durch Inversion entstehenden aequivalenten Bereiche an den Kreisen immer wieder auf's Neue. Wir erhielten so eine „Menge" von Häufungsstellen der Bereiche[1], wo dann die Frage entstand: Was läßt sich von dieser Menge Bestimmtes aussagen? Wir fanden u.a.,

[1] Indem wir uns so ausdrücken, benutzen wir bereits das oben bereichnete Axiom, daß nämlich ein unbegrenzt kleiner werdender Bereich einen Punkt definiert!

daß sie nirgendwo dicht war, aber trotzdem die Mächtigkeit des Kontinuums besaß.

Wir bringen hier nunmehr die Modifikation an, daß wir die Kreise sich in zyklischer Reihenfolge berühren lassen. Dadurch wird der Ausgangs-Bereich (allgemein zu reden) in 2 Kreis-bogen-n-ecke zerlegt, von denen jeder lauter Winkel



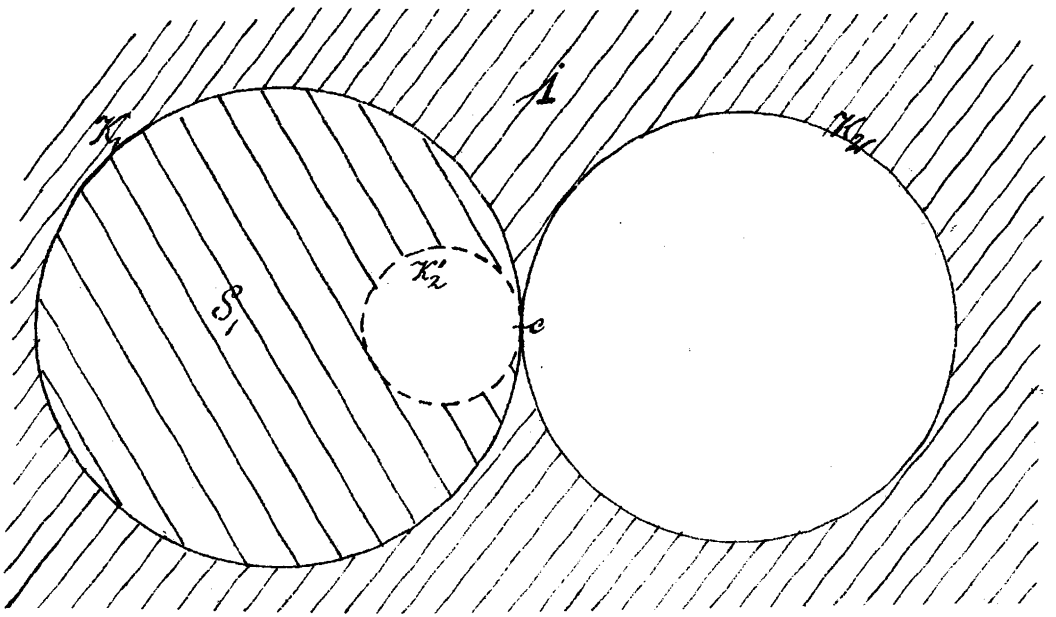
gleich Null aufweist. Man vergleiche die Figur, bei welcher der eine Bereich durch das Unendliche geht, was aber nicht besonders ins Gewicht fällt, da eine Inversion ihn sofort in einen endlichen verwandelt. Wir wenden nun auf diese beiden Hälften des früheren Ausgangsbereiches die Inversion an den Begrenzungskreisen immer wiederholt an und fragen nach der Menge resp. dem Verhalten der dabei entstehenden Grenzpunkte. Wir werden finden, daß die Grenzpunkte eine Jordan-Kurve (d.h. eine Kurve im Sinne des oben besprochenen Jordan-schen

Satzes) bilden, die im allgemeinen nicht analytisch ist, (wobei ich das Wort „im allgemeinen" im Verlaufe der Diskussion noch erklären werde).

Auch hier hebe ich wieder hervor, daß die Idee, an einer Anzahl von Ausgangskreisen fortgesetzt den Fundamentalbereich und seine aequivalenten zu spiegeln, aus der Physik stammt, wo man in der Elektrostatik veranlaßt wird, bei der Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität auf einander berührenden Rotationszylindern genau dieselben unendlich vielen Inversionen zu betrachten, von denen wir hier handeln. Es folgt also, daß man den nicht-analytischen Kurven nicht entgehen kann, wenn man nur die Betrachtungen, mit denen sich die Praktiker ohnehin beschäftigen, hinreichend weit fortsetzt.

Es seien 2 sich berührende Kreise gegeben; wir haben hier nur einen Ausgangsbereich, der sich als Kreisbogenzweieck mit 2 Winkeln Null darbietet; derselbe ist in der Figur (pg. 279), wie früher mit 1 bezeichnet.

Invertieren wir den Bereich 1 an K_1, so erhalten wir einen von K_1 umschlossenen sichelförmigen Bereich, den wir (wie auch die in Rede stehende Inversion selbst) mit S_1 bezeichnen; ebenso



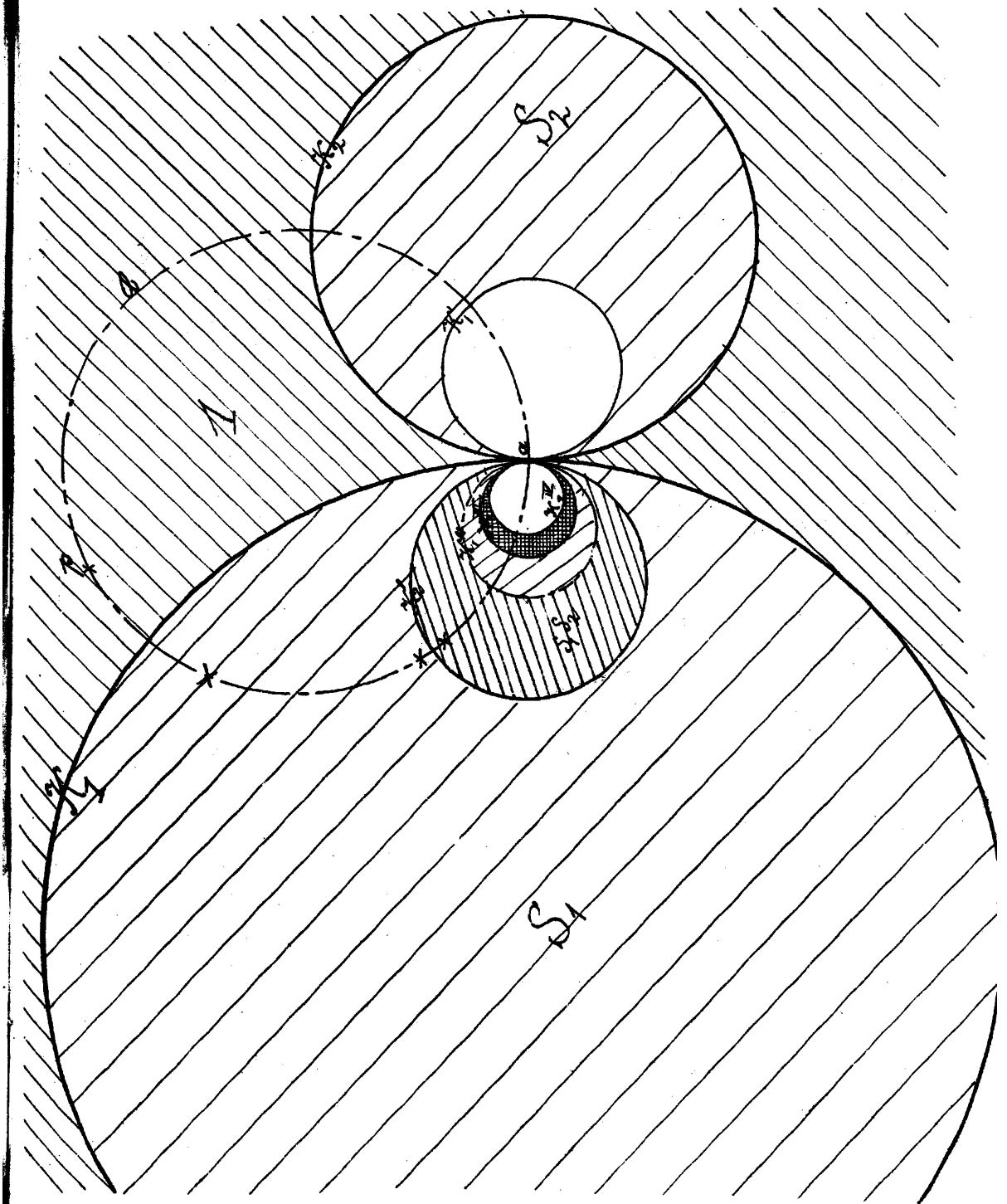
durch S_2 einen sichelförmigen Bereich S_2 in K_2. Es kommt nunmehr wieder unser schon früher erwähntes Fortgangsprinzip zur Geltung, welches darin besteht, dass wir (statt die anfänglichen Inversionen als solche heranzuziehen) jeden neu erhaltenen Bereich immer wieder an seiner innern kreisförmigen Begrenzungslinie invertieren. Dass dieses Prinzip sich mit der Forderung, alle Kombinationen der Inversionen S_1 und S_2 auf den Ausgangsbereich anzuwenden, deckt, wurde früher gezeigt. Gleichzeitig wurde aber dem Prinzipe bereits eine erweiterte Form gegeben, dehingehend, dass man an jedem neu gewonnenen Begrenzungskreise nicht nur den

angrenzenden Bereich, sondern überhaupt alle bis dahin konstruierten Bereiche spiegelt. Haben wir also in unserm Falle erst einmal die 3 Bereiche 1, S_1, S_2 (vergl. die Figur auf pg. 281), so erhalten wir durch Spiegelung an K_2 sofort drei neue Bereiche u. s. w. Mögen wir nun auf die eine oder andere Weise vorgehen, jedenfalls folgt in unserm einfachen Fall der Satz:

Wir bekommen als Grenze unserer aequivalenten Bereiche einen einzigen Verdichtungspunkt und dieser ist mit dem Berührungspunkt der beiden Ausgangskreise identisch.

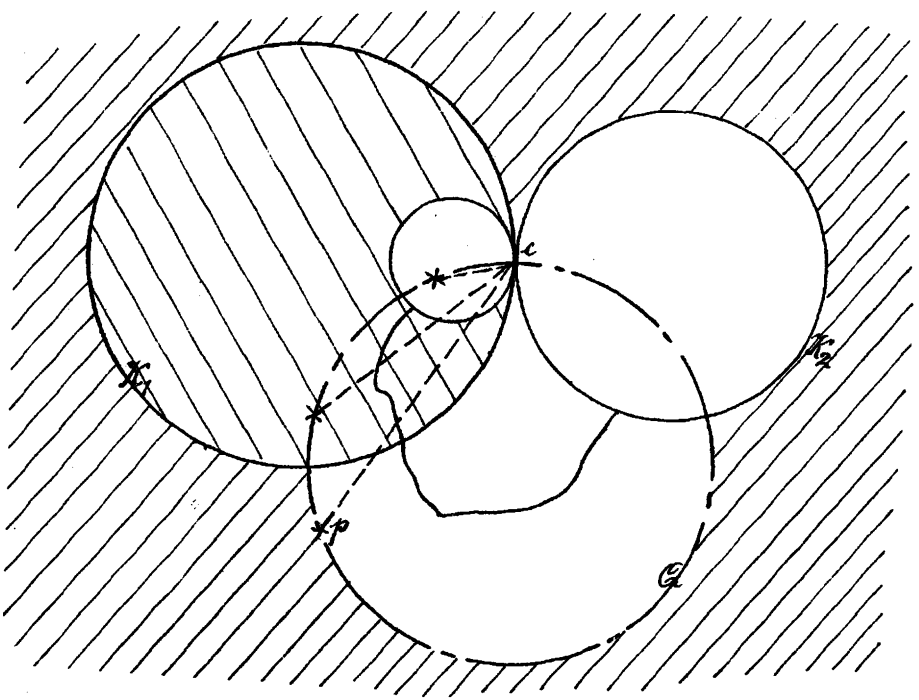
Dabei ist nun interessant, wenn wir einen beliebigen Punkt p in 1 geben, zu sehen, wie die Reihe der unendlich vielen mit p aequivalenten Punkte sich successive dem Grenzpunkt nähern.

Wir betrachten den Orthogonalkreis der beiden Kreise, der durch p geht (Fig. auf pg. 281). Wir wissen, daß derselbe bei allen unsern Operationen $S_1, S_2, \ldots$ in sich übergeht (weil er eben ein Orthogonalkreis der beiden Ausgangskreise ist). Die Folge ist also, daß alle Punkte, die durch Inversion aus p. entstehen, auf dem nämlichen Orthogonalkreise liegen. Man kann den Orthogonalkreis gera-


S_2
S_1

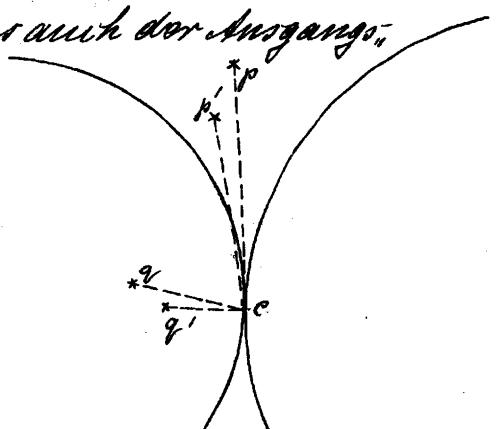
dazu als „Bahnkurve" ansehen, auf der p sprungweise in immer zahlreicher, aber auch kleiner werdenden Sprüngen auf den Grenzpunkt c zurückt.

Das hat nun besonderes Interesse, wenn wir den Grenzpunkt c mit irgend einem Punkte p der Ebene geradlinig verbinden. Wendet man nämlich auf den Punkt p fortgesetzt die unserm Fortgangsprinzip entsprechenden Inversionen an, so rückt p auf dem Orthogonalkreise auf c zu und die genannte Verbindungslinie nähert sich damit notwendig einer bestimmten Grenzlage, nämlich der „zentralen" der beiden Ausgangskreise.



Betrachtet man nun eine geschlossene Kurve, die da, durch entsteht, daß man im Ausgangsbereich von dem einen Kreis K_1 nach dem andern K_2 ein beliebiges (ev. nicht – analytisches) Kurvenstück zieht und zu diesem Kurvenstück vermöge unserer Inversionen die Gesamtheit der aequivalenten Kurvenstücke hinzukonstruiert, endlich aber noch den Punkt c hinzufügt, so hat die so geschlossene Kurve, wie ich behaupte, im Punkte c eine bestimmte Tangente, nämlich die Zentrale.

Dieser Satz ist eine einfache Folge des vorhin aufgestellten Hülfssatzes (der dahin ging, daß die Verbindungsgerade $\overline{cp}$, wenn man p immer wieder den Inversionen der Figur unterwirft, auf die Zentrale als Grenzlage hinführt, welcher auch der Ausgangspunkt p sein mag).



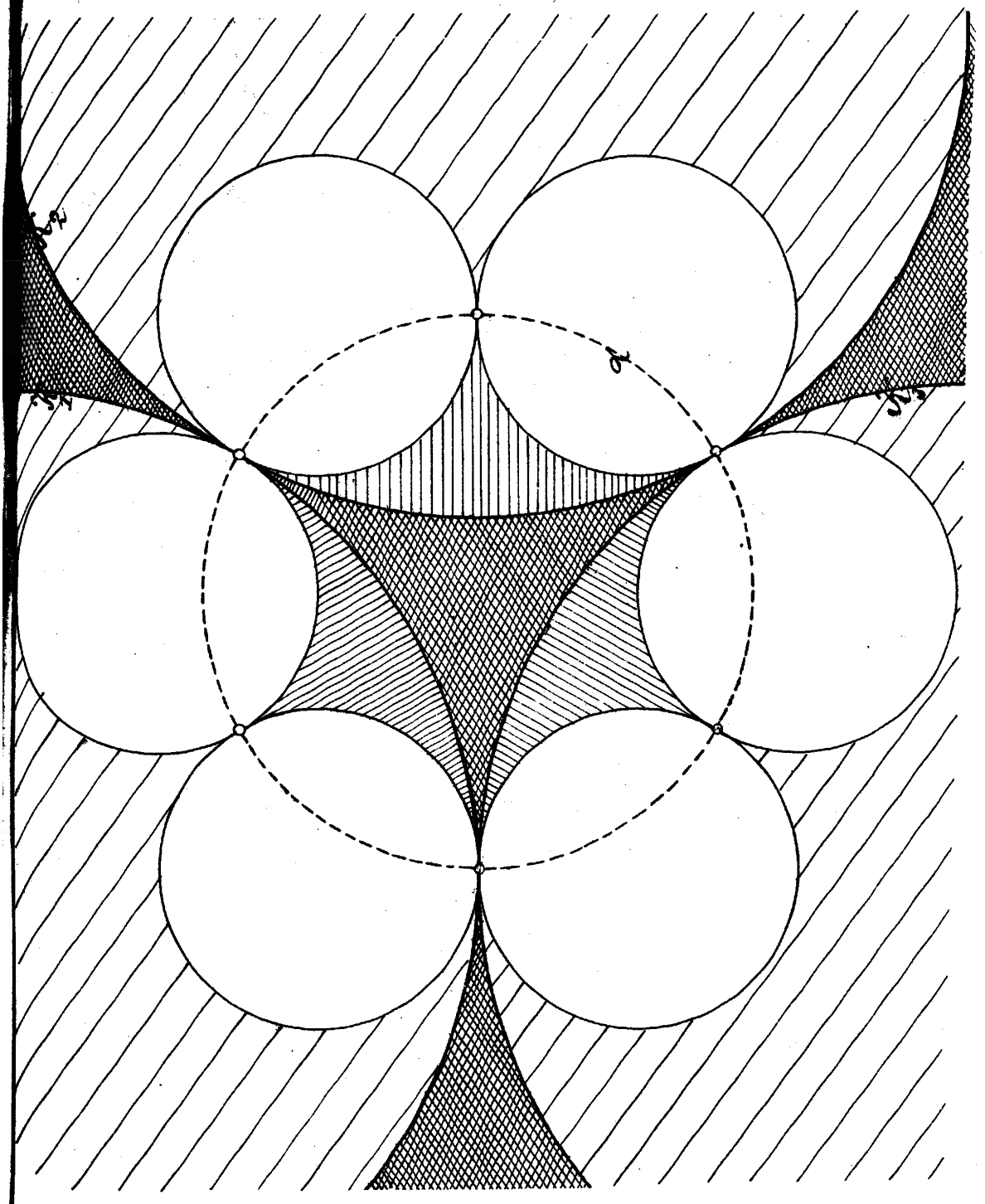
Man wähle in der Tat einen beliebigen Punkt q in der Nähe von c und ziehe $\overline{cq}$, gehe dann auf der Kurve näher an diesem bis q' und ziehe $\overline{cq'}$ u.s.w. alle Punkte q, q', ..., welche wir reihenweise beim Durchlaufen auf c durchlaufen mögen, haben ihnen aequivalente Punkte p, p', ..

im Ausgangsbereich und entstehen aus ihnen durch die wiederholten Inversionen. Daher haben die Geraden cg, cg'... auf Grund der vorausgeschickten Hülfssätze in der Tat die Zentrale zum Limes.

Ich gehe nun von diesem einfachen Fall von 2 Ausgangskreisen zu dem von 3 Ausgangskreisen über. Der Bequemlichkeit halber mögen sie alle gleich gross gewählt sein; dann besteht der Ausgangsbereich aus 2 Kreisbogendreiecken mit lauter Winkeln gleich Null, (vergl. die Figur auf pg. 285).

Nun wissen wir, dass drei Kreise allemal einen und nur einen Orthogonalkreis Ω haben. Derselbe geht hier durch die 3 Berührungspunkte hindurch. Er ist bei allen in Betracht kommenden Inversionen invariant, so dass wir ihn wählen, um uns in der Figur zu orientieren.

Um übrigens alle aequivalenten Bereiche der beiden Ausgangsbereiche zu erhalten, brauchen wir blos die aequivalenten Gebiete im Innern des Orthogonalkreises zu konstruieren und hernach die sämtlichen so erhaltenen aequivalenten Gebiete am Orthogonalkreise zu invertieren, (womit wir die aequivalenten Bereiche des äusseren Ausgangsbereiches erhalten). Es folgt dieser Satz, bei dem ich nicht länger verweile,



einfach aus dem Grundsatz der Inversionen, den wir früher ausführlicher betrachteten, daß nämlich Figuren, die in Bezug auf einen Kreis K invers sind, bei Inversion an einem neuen Kreis A solche Figuren ergeben, die in Bezug auf den bei der Inversion aus K hervorgehenden Kreise K' invers sind.

Wir beschränken uns also bei unsern Konstruktionen auf das Innere von A.

Da legen sich neben das Ausgangsdreieck zunächst 3 Nebendreiecke, die 4 Dreiecke bilden zusammen ein Kreissechseck, dessen Zipfel senkrecht auf A aufstehen.

Nach unserm Fortgangsprinzip können wir nun entweder die 3 Nebendreiecke einzeln an ihren freien Kanten, oder auch gleich das ganze Sechseck an jeder seiner 6 Seiten spiegeln (wodurch wir gleich ein Dreißigeck erhalten). Sie sehen, wie das weitergeht:

Die aequivalenten Bereiche, die aus dem Ausgangsbereich entstehen, überdecken das ganze Innere von A immer vollständiger (wobei die Zipfel der erhaltenen Bereiche auf A aufliegen und dort immer zahlreicher werden).

Je weiter man den Prozeß führt, um so dichter schließen sich die aequivalenten Bereiche an A an, so daß schließlich jeder Punkt des Orthogonalkreises ein

Verdichtungspunkt wird.

Die hier so gezeichnete resp. geschilderte Figur, die den Herren, welche sich mit den elliptischen Modulfunktionen beschäftigt haben, hinreichend bekannt ist, ist gewissermassen ein Geschenk, das die Geometrie von der Funktionentheorie erhalten hat. Denn, obwohl man bei einem solchen bis in's Unendliche fortgehenden Prozess sehr wohl von dem rein geometrischen Standpunkt ausgehen kann, so ist doch der historische Hergang der gewesen, dass man in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen genötigt war, zuerst solche Figuren zu studieren. Rein begriffl. kommt die Figur allerdings gewissermassen bei v. Staudt vor, (insofern er zu 3 beliebigen Punkten einer Kegelschnitts immer erneut den vierten harmonischen Punkt konstruiert), aber v. Staudt hat das nicht anschauungsmässig ausgeprägt.

Ich gehe noch etwas genauer auf unsere Figur mit den 3 sich berührenden Kreisen ein, indem ich noch einige Einzelheiten hervorhebe, die das Studium der Figur bei 4 sich berührenden Kreisen wesentlich erleichtern.

Ich lege die Figur symmetrisch an, indem ich die Radien der sich berührenden Kreise gleich gross

wählte, worauf ihre Berührungspunkte in den Ecken eines dem Orthogonalkreise a einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks fallen. Wir erhalten die zugehörige Gesamtfigur, wenn wir entweder zuerst den innern Bereich durch Inversion reproduzieren und die so entstehende Teilfigur am Orthogonalkreise a invertieren, oder indem wir zunächst den äusseren Bereich vervielfältigen und dann diese Figur am Orthogonalkreise spiegeln.

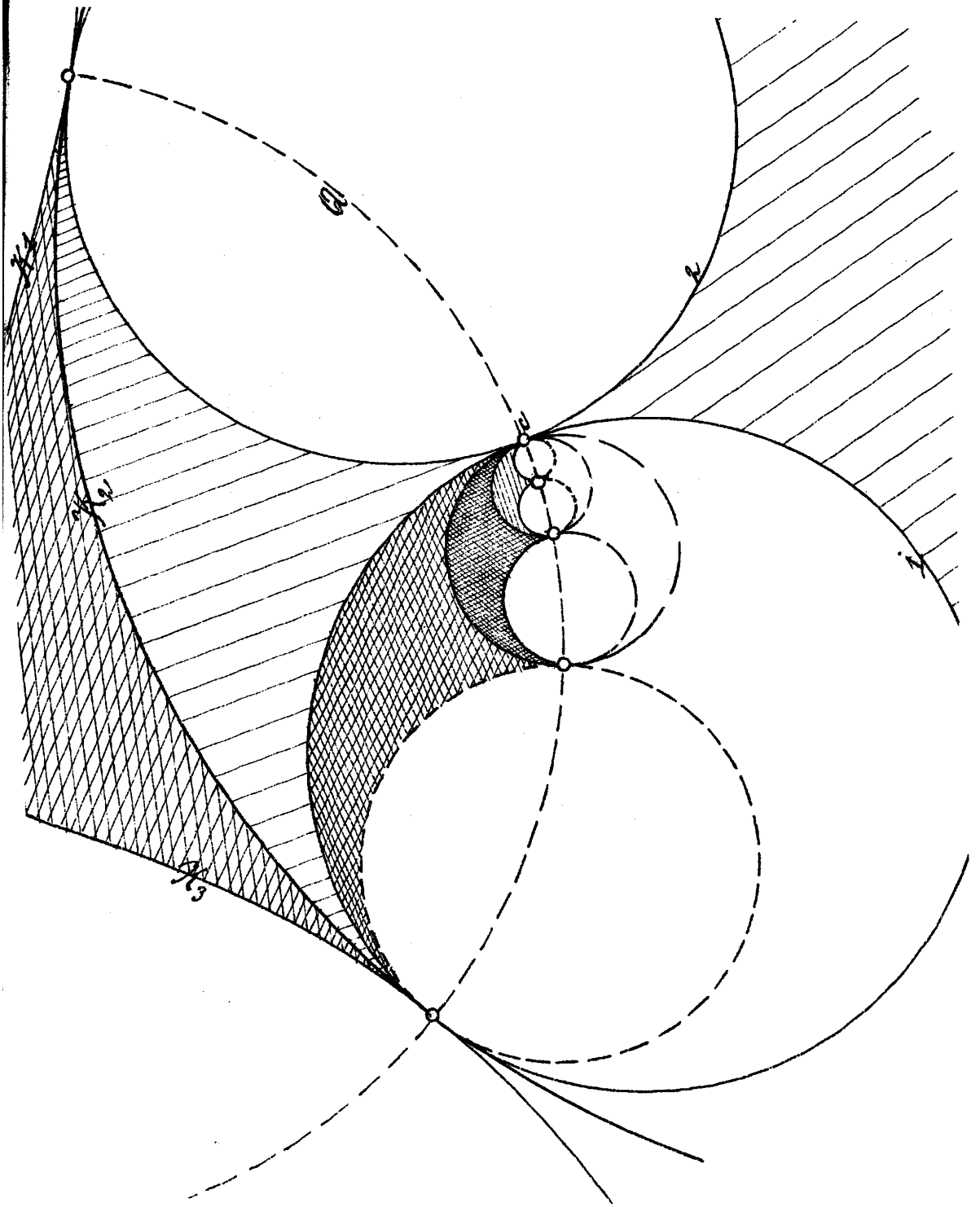
Wollen wir nunmehr darauf achten, wie sich die Kontaktstellen der entstehenden Kreisbogendreiecke auf der Peripherie des Orthogonalkreises häufen. Von Hause aus haben wir 3, dann 6, weiter 12 u.s.w. Kontaktstellen, so dass wir sagen können:

Der Orthogonalkreis wird in dem Maasse als die Konstruktion weitergeführt wird, immer dichter mit den Kontaktstellen zweier Kreise besetzt.

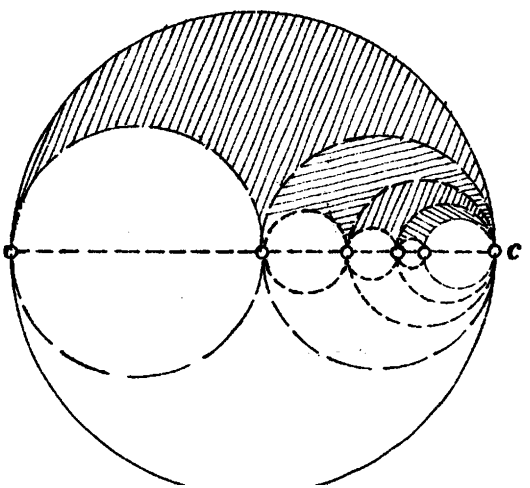
Da ist nun die nächste Frage: Was lässt sich von der Menge der Kontaktstellen aussagen?

Zunächst ist sie abzählbar, weil wir die Kontaktstellen durch Aneinanderreihen diskreter Operationen gewinnen. (Dabei sprechen wir ausdrücklich nicht von den „Verdichtungsstellen" der Kontaktstellen, sondern nur von den Kontaktstellen als solchen).

So ist leicht zu sehen, dass jede Kontaktstelle Verdichtungspunkt der übrigen ist.


a
2
c
1
K_1
K_2
K_3

Wir betrachten 2 sich in c berührende Kreise auf dem Orthogonalkreise (cf. Figur pg. 289) und führen die Figur in der Weise fort, daß wir den einen Kreis 1 an dem andern 2 und diesen an 1 invertieren, (es ist dies der iterierte Prozeß, den wir in unserm Beispiel bei 2 sich berührenden Kreisen studierten). Dadurch wird die Stelle c, welche zunächst nur Kontaktstelle der Kreise 1 und 2 ist, Berührungsstelle unendlich vieler Kreise (die eben aus 1 und 2 durch wiederholte Inversion abgeleitet werden). Und jeder dieser unendlichen vielen, immer kleiner werdenden Kreise führt mit seinem 2ten Schnittpunkt, den er mit dem Orthogonalkreis gemein hat, eine neue Kontaktstelle mit sich. Man kann die Figur durch eine Reihe weiterer Kreise so ergänzen, daß man sieht, wie diese successiven Kontaktstellen neben einander liegen, den Dreiecken angehören



[In der nebenstehenden Figur sind die Verhältnisse so gewählt, daß der Orthogonalkreis in eine gerade Linie ausgeartet ist.]

Ich resumiere vielleicht so:

1) Die unendlich vielen von uns konstruierten Kreise, die sich im Punkte c berühren und häufen, sind Begrenzungskreise von lauter dreizipfeligen Dreiecken, die bei der Fortsetzung unserer Figur ohnehin zu konstruieren sind.

2) Indem solcherweise der Punkt c eine Häufungsstelle der bezeichneten Dreiecke wird, ist er auch eine Häufungsstelle für die Ecken der Dreiecke d. h. eben ein Verdichtungspunkt anderer Kontaktstellen. —

Als weitere Eigenschaft unserer Punktmenge führe ich nunmehr an, daß sie auf dem Orthogonalkreis überall dicht liegt. Kein Stück des Orthogonalkreises bleibt nämlich frei von Kontaktstellen, weil die Radien unserer Inversionskreise bei Fortsetzung unserer Konstruktion jede beliebige Kleinheit unterschreiten.

Der Weiteren treten dann als Verdichtungsstellen der Menge der Kontaktpunkte noch alle übrigen Punkte von A hinzu, die nicht schon selbst als Kontaktpunkte mitzählen.

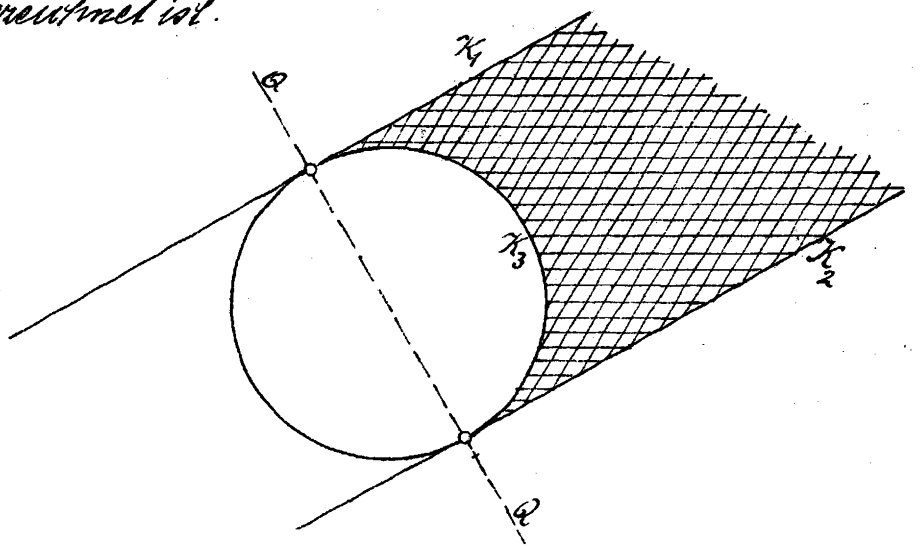
Die Beziehung zwischen den überall dichten Kontaktstellen auf dem Orthogonalkreise und den restlichen Punkten auf A ist ganz ähnlich der Beziehung zwischen den rationalen und irrationalen Punk-

ten auf einer Abzissenachse, indem auf letzterer die „rationalen" Punkte auch überall dicht liegen und abzählbar sind, während die „irrationalen" Punkte als Verdichtungsstellen der rationalen erscheinen. Denken wir daran, daß nach Dedekind die irrationale Zahl durch den Schnitt definiert wird, den sie in der Menge der rationalen Zahlen macht, so wird die in Rede stehende Analogie noch deutlicher, wenn man sagt, daß auch hier jeder Punkt der Orthogonalkreisfläche, der nicht selbst eine Kondaktstelle ist, einen Schnitt in der Menge der Kondaktstellen macht und durch diesen geraden definiert worden kann. —

Ich habe diese Dinge soweit etwas unbestimmt vorgetragen, da ich an keinerlei quantitative Beziehungen, sondern nur an die Figur als solche angeknüpft habe. Aber es ist leicht, die Figur in eine Gestalt umzuwandeln, an der sich die Sache arithmetisch verfolgen läßt.

Wir können nämlich, da es sich um Verhältnisse handelt, die bei beliebiger Inversion der Gesamtfigur nicht geändert werden, ohne Einschränkung der Allgemeinheit dem Ausgangsbereiche eine einfache Form geben. Man invertiere das Ausgangsdreieck an einem Kreise, der seinen Mittelpunkt in einer Dreiecksecke hat. Man erhält so ein Dreieck, welches von 2 parallelen gera-

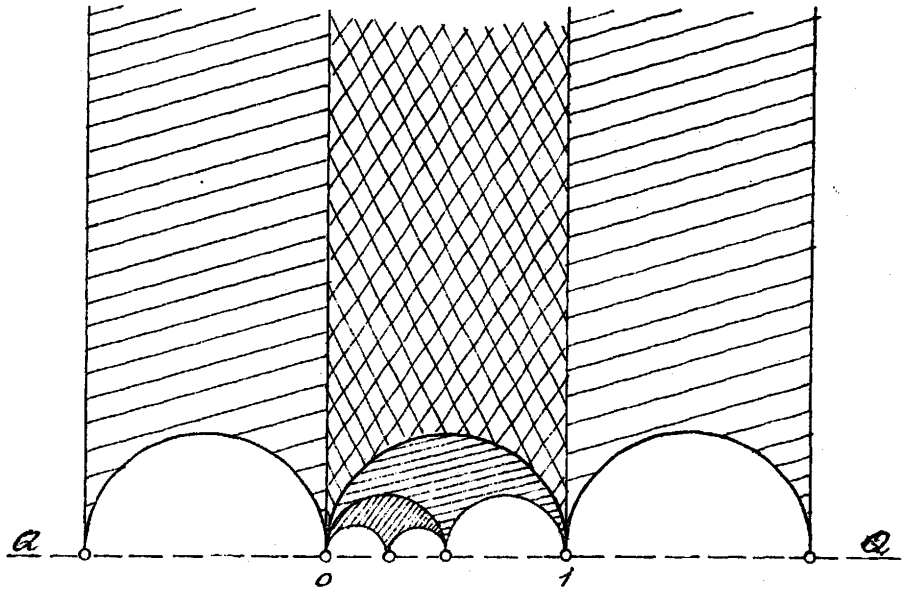
den Linien und einem diese Geraden berührenden Halbkreise begrenzt ist, wie dies in der folgenden Figur gezeichnet ist.



Der Orthogonalkreis wird zu einer Geraden QQ gestreckt, die durch die beiden im Endlichen gelegenen Kontaktpunkte geht.

An diese Figur knüpft die gewöhnliche Darstellung der in Rede stehenden Verhältnisse an, die man in der Funktionentheorie gibt (wobei man die Figur noch bequem gegen das Koordinatensystem orientiert).

Man wählt dann nämlich die Gerade QQ als x-Axe und den Anfangspunkt und Maßstab so, daß die beiden Ecken im Endlichen in die Punkte $x = 0$, $x = 1$ fallen. Hier ist die Gesamtfigur leicht zu konstruieren, indem



wir nach rechts und links die erste Figur wiederholen und in jeden der dabei auftretenden Halbkreise hinein die so erhaltene Serie von unendlich vielen Dreiecken spiegeln (vergl. die Figur oben). Auf diese Weise kommen alle Kontaktpunkte auf die x-Axe zu liegen, und es ist nun leicht, was an unserer ersten Figur nur in Anlehnung an das unmittelbare geometrische Gefühl erläutert wurde, jetzt auf arithmetischer Basis genau zu berechnen. Die dann auftretenden Formeln zeigen, daß die successiven Kontaktpunkte lauter rationale Abszissen x bekommen und daß auch jeder Punkt mit einem rationalen x ein Kontaktpunkt wird. Es besteht demnach nicht nur eine Analogie zwischen der Menge der Kontaktpunkte und der Men-

ge der rationalen Punkte auf der Abszissenachse, son, dern es ist direkt Identität vorhanden.

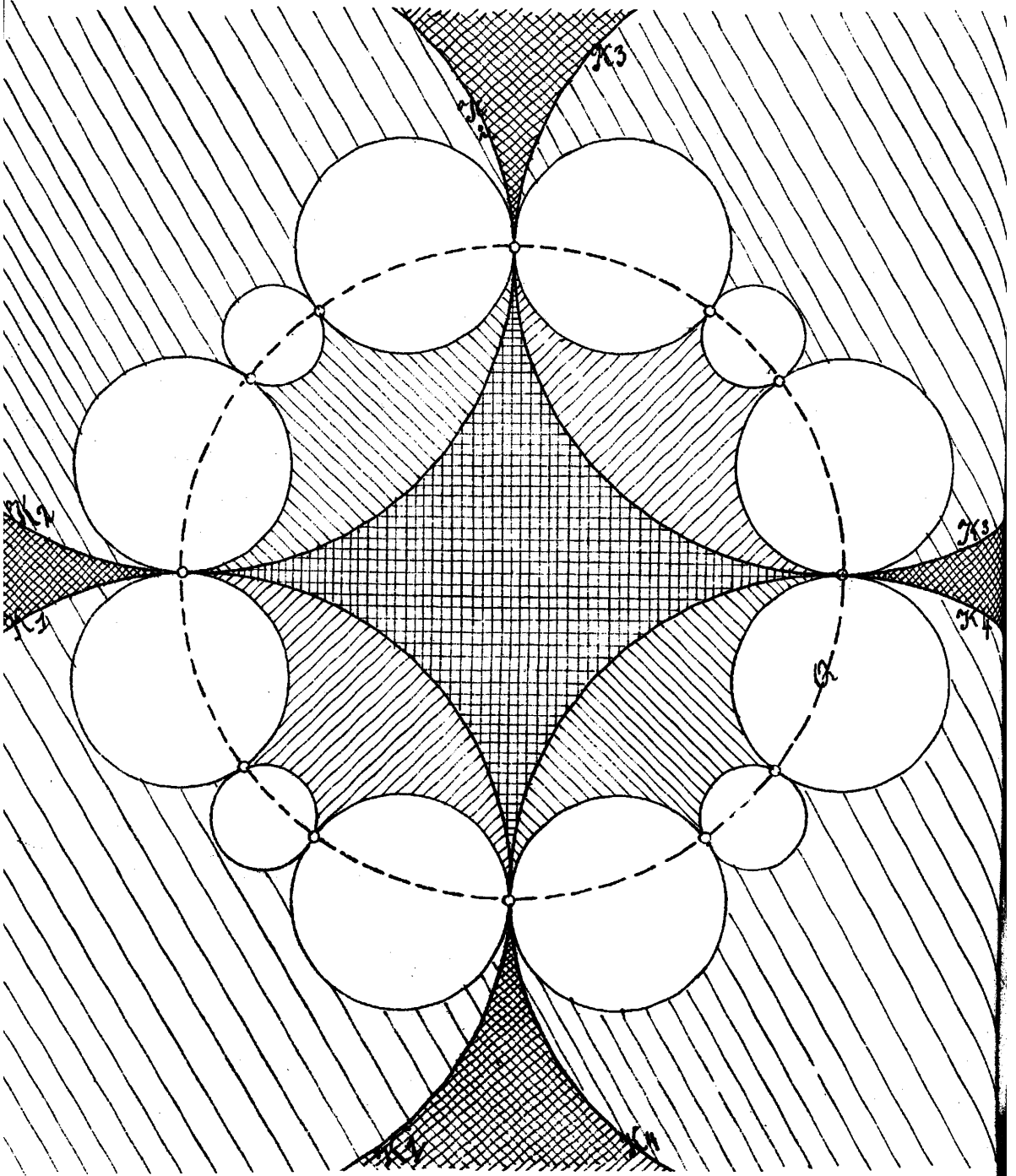
Dies als Ergänzung zu dem Fall von 3 Kreisen!

Ich gehe nunmehr zu unserm eigentlichen Gegenstande über, bei dem wir mit 4 sich in zyklischer Reihenfolge berührenden Kreisen beginnen. Hier liegen im Ganzen ähnliche Verhältnisse wie bei dem vorigen Fall vor, so dass uns die Auffassung durch das eingehende Studium desselben sehr erleichtert ist.

Die 4 Kreise mögen zunächst noch einen gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen (vergl. die Figur pg. 296).

Wir mögen dann als Ausgangsbereich zunächst das äussere oder das innere der beiden entstehenden Kreisbogenvierecke benutzen*). Indem wir an letzteres anknüpfen und die Inversionen ausführen, erhalten wir zunächst gemäss unserm Fortgangsprinzip durch Konstruktion der anliegenden Vierecke ein aus 5 Vierecken bestehender Zwölfeck, dann ein 36-eck u. s. w. Die Kontaktpunkte auf dem Orthogonalkreise werden also bei diesem allseitig symmetrischen Verfahren der Reihe nach 4, 12, 36, 108, ... sein. Wir fragen gleich, wie die Kontaktpunkte über die Peripherie des

*) Als äusseres Kreisbogendreieck bezeichnen wir den Bereich, der sich durch das Unendliche zieht.

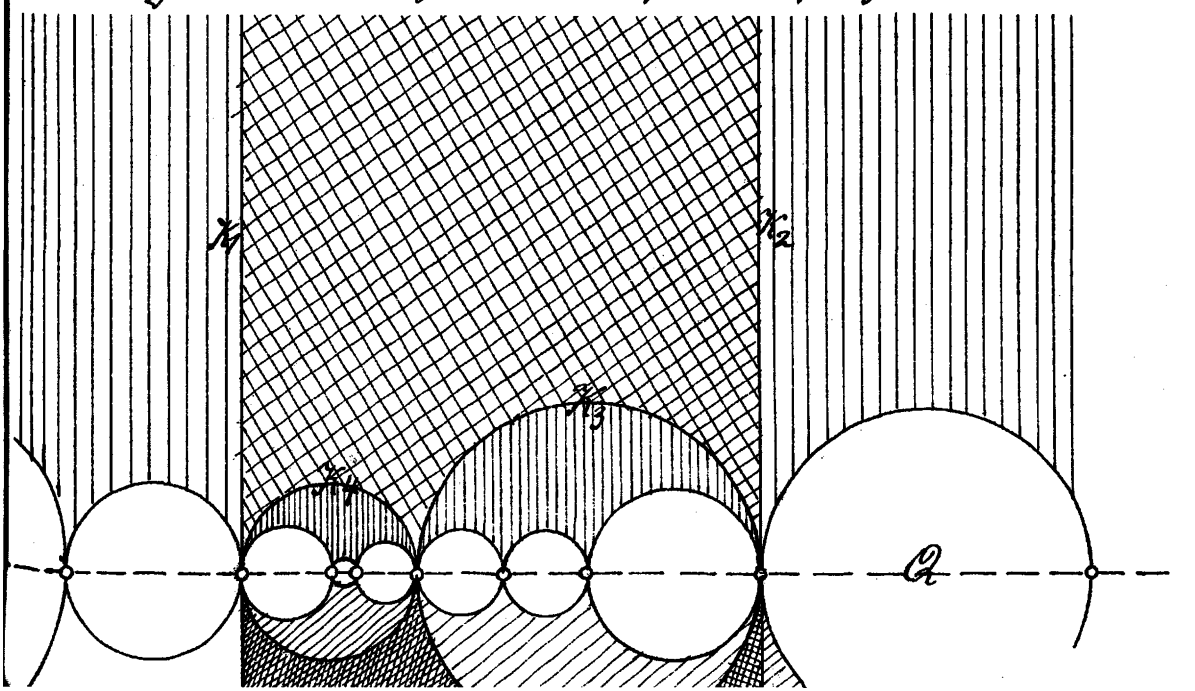

K3
K2
K1
K3
K4
Q

Orthogonalkreises verteilt sind. Wir können hier sofort folgendes anführen:

1/ Die Menge der Kontaktpunkte ist abzählbar,

2/ Die Menge der Kontaktpunkte liegt auf dem Orthogonalkreise überall dicht, sodass sämtliche Punkte des Orthogonalkreises als Verdichtungsstellen von äquivalenten Bereichen erscheinen, /äquivalent zum Ausgangsbereich, aus dem sie nach dem Fortgangsprinzip hergestellt sind/.

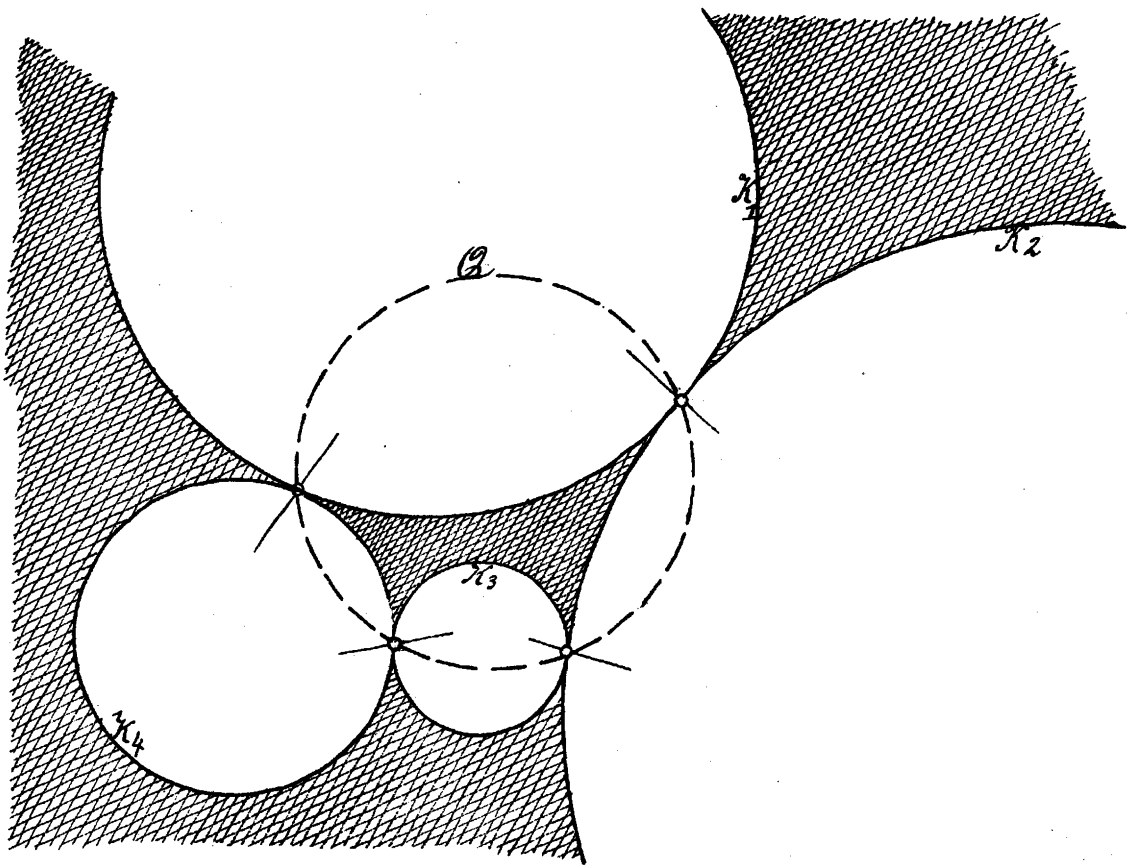
Wir wollen nunmehr unsere Figur dadurch spezialisieren, dass wir durch eine geeignete Hilfsinversion einen Kontaktpunkt in's Unendliche werfen. Wir erhalten damit folgende Figur, die bei der arithmetischen Behandlung zweckmässigerweise zugrunde gelegt wird:



Der Orthogonalkreis artet in eine Gerade aus, die wir zur x-Axe wählen, 2 von den Kreisen werden wieder parallele Gerade, während die beiden andern sich zwischen diesen senkrecht auf die x-Axe aufsetzen. Durch Spiegelung nach rechts und links an den Geraden und Inversionen an den Kreisen ergiebt sich dann die Gesamtfigur. Indem wir wieder 2 der Kontaktpunkte nach 0 und 1 legen und die Abszisse der dritten im Endlichen gelegenen mit δ bezeichnen ($0 < \delta < 1$), erhalten wir auf der x-Axe eine Menge von Kontaktpunkten, die sich nicht mehr mit der Menge der schlechtweg rationalen Punkte deckt, aber Abszissenwerte besitzt, welche rational von der Grösse δ abhängen. Es ist nun ein an sich interessantes Studium, zu untersuchen, wie diese rationalen Funktionen der Grösse δ beschaffen sein mögen, (wie sie independent mögen definiert werden können u. s. w.).

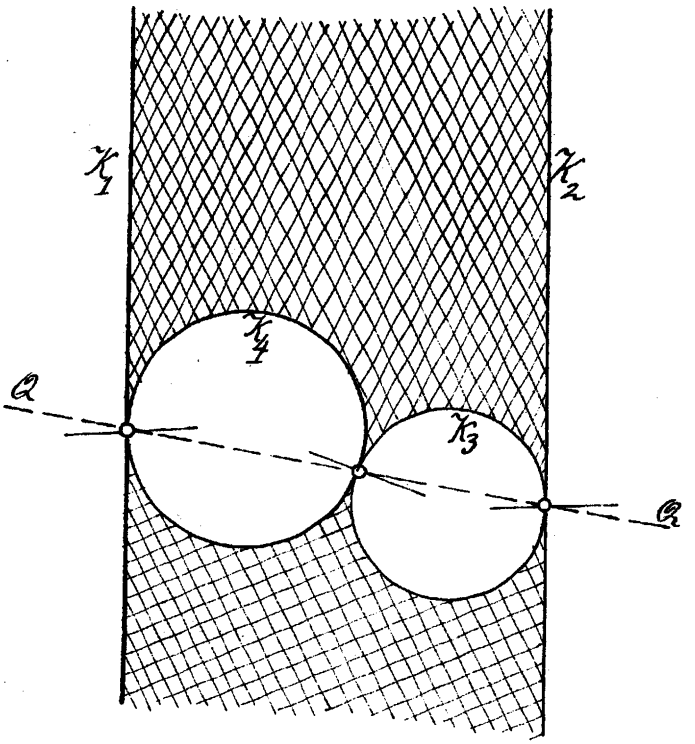
Dies war der spezielle Fall, wo für die 4 Ausgangskreise ein Orthogonalkreis existiert. Wir gehen nun zu dem natürlich viel komplizierteren allgemeinen Fall über, aber auch da werden wir eine gewisse Übersicht vermöge unserer bisherigen Sätze gewinnen.

Ich sage zunächst: Es seien 4 Kreise gegeben, die sich in zyklischer Reihenfolge berühren. Dann gilt immer noch der Satz, daß die 4 Berührungspunkte auf



einem Kreise liegen (der aber im allgemeinen nicht Orthogonalkreis ist). Vgl. die Figur oben.

Um zunächst diesen Hilfssatz zu beweisen, wenden wir den schon benutzten Kunstgriff an, durch Inversion an einem Kreise (der um einen Eckpunkt der Figur als Mittelpunkt beschrieben ist) die Figur zu vereinfachen. Die beiden in dem als Inversionszentrum dienenden Eckpunkte zusammenstossenden Kreise mit dem Winkel Null verwandeln sich dabei in 2 parallele



Gerade, und die beiden anderen Kreise ordnen sich in dem Raume zwischen diesen, wie es die Figur zeigt, ein.

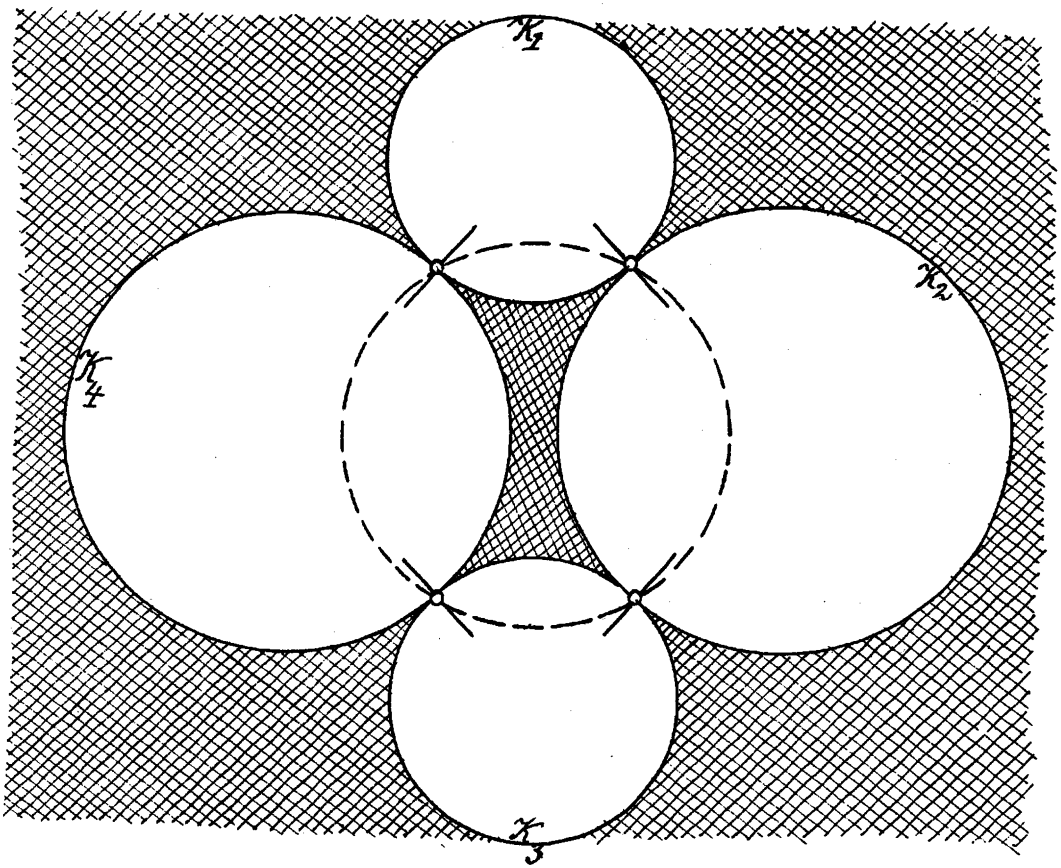
Wenn wir nun zeigen wollen, dass in unserer ursprünglichen Figur die 4 Berührungspunkte auf einem Kreise liegen, so haben wir hier zu zeigen, dass sich durch die 3 im Endlichen gelegenen Berührungspunkte eine Gerade legen lässt. Dass dies der Fall ist, ist sofort elementargeometrisch klar und damit unser Hülfssatz bewiesen. Wir nennen diese Gerade die Querlinie q, allgemein, den Kreis durch die 4 Ecken des Vierecks den Querkreis q.

Zugleich ist aber noch weiter klar, wenn wir in den Berührungspunkten die Normalen gegen die Kreise errichten (die sich beziehungsweise in den Mittelpunkten der beiden mittleren Kreise schneiden), dass dann

unsere Querlinie diese Normalen oder Zentralen (wie ich der Deutlichkeit halber lieber sagen will) unter dem Winkel $\pm \varphi_0$ schneidet, wo φ_0 ein von Null verschiedener, vorgegebener Winkel ist. Ist $\varphi_0 = 0$, so kommen wir auf unsern Normalfall der vorigen Erörterungen zurück. Übrigens wird φ_0, wie die Dimension der Figur zeigt, immer $< 45°$ sein. Übertragen wir dieses Sachverhältnis auf unsere ursprüngliche Figur, so heißt es:

Die $\pm$ Kontaktpunkte der Figur liegen auf einem Kreise A und zwar bildet dieser Kreis (Querkreis) mit den zu den Kontaktpunkten gehörigen Zentralen Winkel $\pm \varphi_0$, wo φ_0 eine gegebene Größe $< \frac{\pi}{4}$ hat, die wir von Null verschieden nehmen, damit wir nicht auf den einfachen Fall zurückkommen.

Dieser Satz mag dazu dienen, der Ausgangsfigur eine für die weitere Betrachtung zweckmäßige Form zu geben. Es ist ein altes Prinzip, daß eine komplizierte Figur durch symmetrische Anlage weitaus an Faßlichkeit gewinnt, und es mag denn im Folgenden die Ausgangsfigur in der Weise gezeichnet werden, daß wir mit dem Querkreis A beginnen und die $\pm$ Kontaktpunkte in den Ecken eines dem Querkreise einbeschriebenen Rechtecks wählen (vergl. die Figur auf pg. 302).

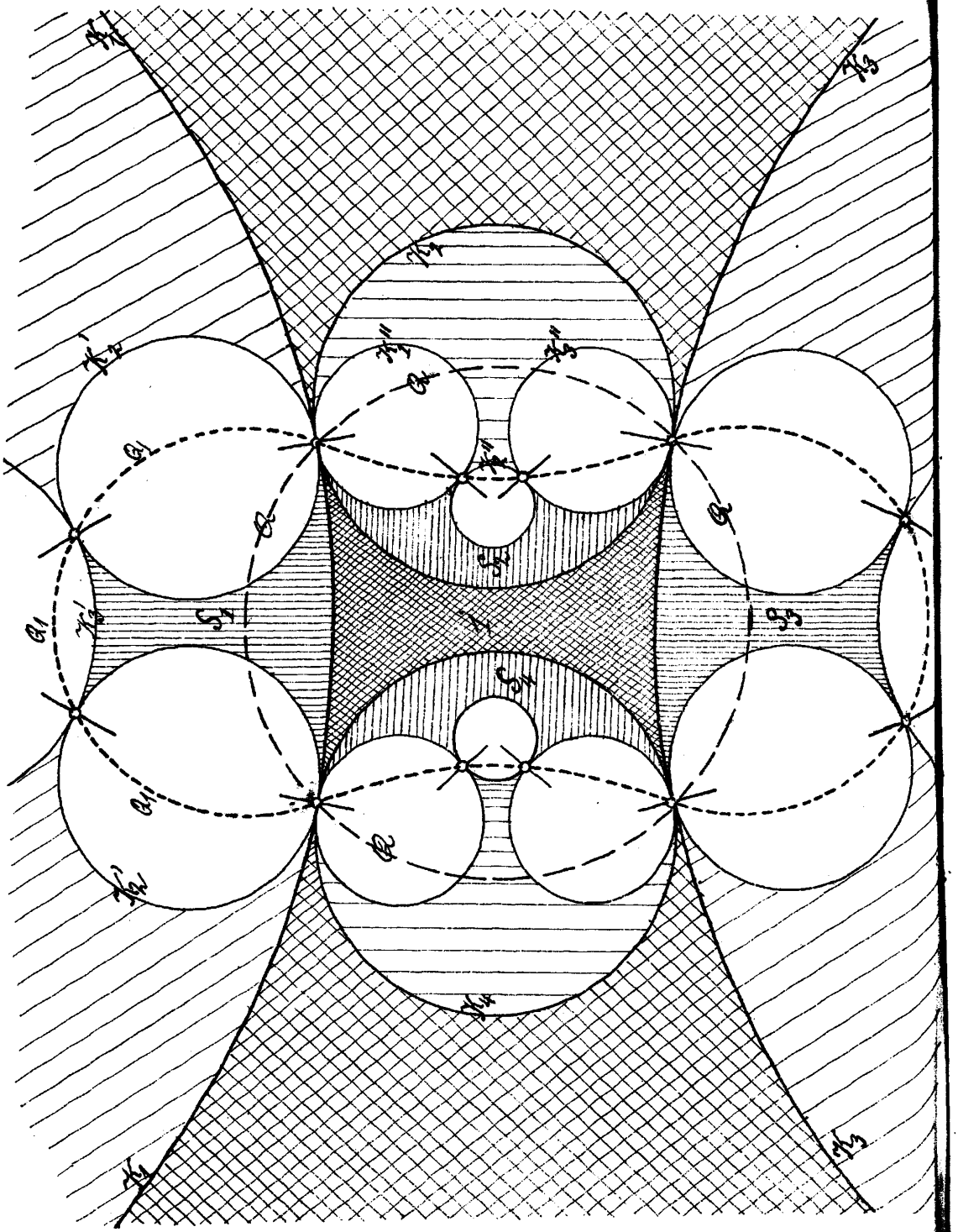


Zeichnen wir dann noch die Richtungen der Zentralen, unter geeigneter Annahme eines von ϑ verschiedenen Winkels $\pm \varphi$ ein, so ist es leicht, hinter her die 4 „Ausgangskreise" festzulegen (die die zu den Zentralen senkrechten Normalelemente enthalten). Wir bekommen dabei ein inneres und äußeres Kreisbogenviereck, die in Bezug auf den Querkreis $\mathfrak{C}$ nicht genau invers sind, aber zwischen denen noch diese Beziehung im Sinne der Analysis situs" besteht.

Nunmehr reproduzieren wir die Figur zunächst durch Inversion an K_1. Es möge sie aus $A A'$, aus $K_2\ K_2'$, aus $K_3\ K_3'$, $K_4\ K_4'$ entstehen. Die Konstruktion dieser 4 Kreise wird uns dadurch erleichtert, daß die auf dem Kreise K_1 gelegenen Kontaktpunkte, die die Schnittpunkte von K_1 mit A sind, erhalten bleiben. Der Winkel φ_0 bleibt auch erhalten, nur daß er, um z. B. A' zu zeichnen, nach der andern Seite von den Zentralen aus abzutragen ist. Dadurch erhält A' oder vielmehr der uns allein interessierende Bogen von A', der in das Innere von K_1 fällt, eine ganz charakteristische Gestalt. Ebenso leicht ist A nach K_2 zu spiegeln, hier aber wird die konvexe Seite nach dem Kreise A zu gewendet sein. Wir benennen das in K_2 fallende Stück mit A''. Denken wir uns das an K_3 und K_4 so fortgesetzt, so haben wir folgendes Resultat:

Der Querkreis A ist nach den 4 Inversionen ersetzt durch 4 Kreisbogenstücke A', A'', A''', A^{IV}, welche sich in den Kontaktpunkten ohne Knick aneinanderreihen, indem sie mit den Zentralen der Kontaktpunkte Winkel $\pm\varphi_0$ bilden (vergl. die Figur pg. 304).

Nachdem diese neuen Querkreise gezeichnet sind, ist es sehr leicht, die Kreise K_2, K_3, K_4 an K_1, oder die Kreise K_3, K_4, K_1 an K_2 zu spiegeln u. s. w.



Nehmen Sie die Inversion an K_1.

Bei der Inversion kommen die neuen Kontaktpunkte zunächst auf das Kreisbogenstück A' und dann auf die Geraden durch den Mittelpunkt von K_1 und die alten Kontaktpunkte, also in deren Durchschnitt. Zeichnen wir sodann die Zentralen in richtiger Stellung ein, so ist es nicht schwer, die Bilder der 3 Kreise K_2, K_3, K_4 zu konstruieren, die zusammen mit K_1 ein erstes Seitenbild unseres Ausgangsvierecks umgrenzen. Ebenso gestaltet sich die Inversion an K_2 etwas anders an K_2 und K_4, insofern dort der Bereich wegen des Kreisbogenstücks A'' resp. A^{IV} eine etwas andere Gestalt erhält. Vergleiche hierzu die Figur auf pg. 304. Indem das einfachste Element für die leichte Auffassung der so entstehenden Figur der Kreis K und die Kreisstücke A', A'', A''', A^{IV} sind, will ich die Figur nochmals mit folgenden Worten schildern.

Ursprünglich hatten wir einen Kreis mit 4 Kontaktpunkten und ihren Zentralen. Aus diesem Kreise Q ist ein Kurvenzug geworden, bestehend aus 4 Kreisbogenstücken, der jetzt im Ganzen 12 Kontaktpunkte mit 12 Zentralen trägt. Auf diesen 12 so entstehenden Segmenten des Kurvenzuges erheben sich 12 Kreise $K', K'' \ldots$ $\ldots K^{IV} \ldots$. Diese zerlegen die Ebene in ein Inneres,

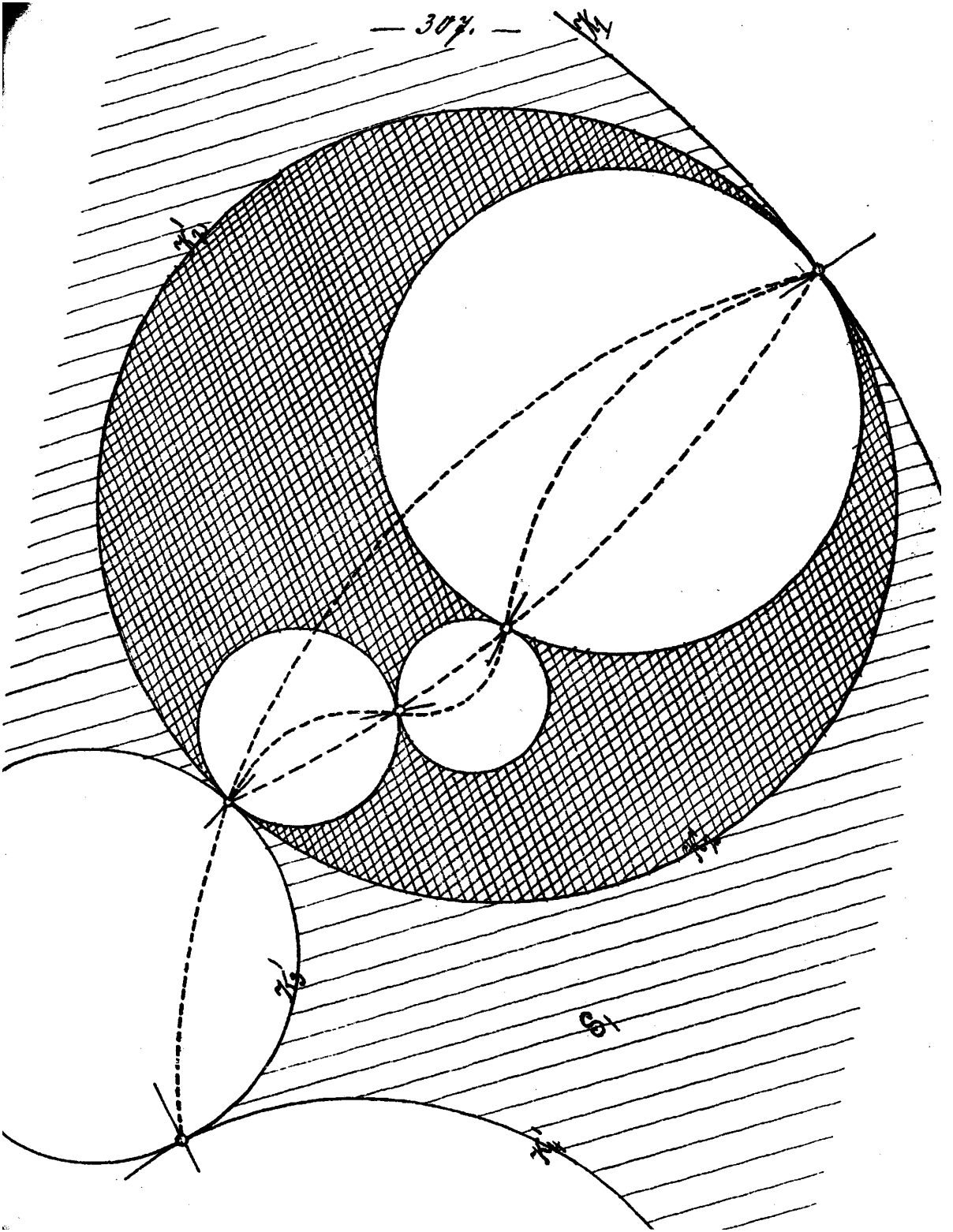
welches aus 5 Vierecken, und ein Äusseres, das ebenfalls aus 5 Vierecken besteht, und lassen uns im übrigen Freiheit, im Innern der 12 Kreise weitere Details zu zeichnen.

Es ist ganz klar, wie die Sache gemäss unserm Fortgangsprinzip weitergeht.

Wir greifen einen der neuen Kreise z. B. K_2' heraus, der an der Bildung einer Kreisbogenvierecks partizipiert. Unser Fortgangsprinzip ist, die beiden Vierecke, die von aussen an K_2' herumreichen, in den Kreis K_2' hineinzuspiegeln. Die Folge ist, dass wir in K_2' 3 neue Kreise erhalten, deren Berührungspunkte auf demjenigen Querkreis, Knick liegen, das aus a' durch Inversion an K_2' entsteht. (vergl. die Figur auf pg. 307). Die Kurve, die solchermaßen an Stelle des innerhalb K_2' verlaufenden Stückes von a' tritt, wird aus 3 Kreisbogen bestehen, die sich ohne Knick in der durch die Figur angedeuteten Weise aneinanderreihen, wobei sie abwechselnd Winkel $\pm \varphi$ mit den benachbarten Zentralen bilden.

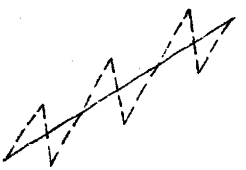
Berücksichtigen wir die Gesamtfigur, so folgt der Satz:

Wenn wir nach unserm allgemeinen Fortschreitungsprinzip in jeden unserer vorhin erhaltenen 12 Begrenzungskreise jetzt hineingehen, dann erhalten wir statt der 12 Begrenzungskreise mit ihren 12 Kontaktpunkten deren


S4
S2
S1
S3

36, in dem in jedem bisherigen Kreise drei neue entstehen. Dabei wird von den 12 Stücken der Querkreise $\mathfrak{k}' \ldots \mathfrak{k}^{IV}$, die wir bei dem letzten Schritt erhielten, jetzt jedes in 3 neue, kleinere Kreisstücke zerlegt, die sich nach Art einer Wellenlinie ohne Knick in den 36 nunmehr vorhandenen Kontakt-punkten (zu denen auch die früheren 12 gehören) aneinander anschliessen, wobei sie mit den zugehörigen Zentren den Winkel $\pm 4_0$ bilden.

Offenbar erinnert diese successive Verlegung der Querkreisstücke in 3 und Ersetzung der einzelnen Stücke durch drei neue Querkreisstücke daran, wie wir bei der Peano-Kurve die geradlinigen Stücke zunächst in 3 Glieder teilten und dann jedes durch Zickzacklinien von 3 geraden Linien ersetzten; beidemal ist im analogen Sinne die Zahl 3 bevorzugt, aber während bei der Peano-Kurve die Diskontinuität sehr stroff ist, haben wir hier noch Stetigkeit der ersten Differentialquotienten.



Sie begreifen, worauf es nun ankommt. Ich bezeichne $\mathfrak{k}$ mit C_1, $\mathfrak{k}' + \ldots + \mathfrak{k}^{IV}$ mit C_2, die folgende aus 12 Kreisbogenstücken zusammengesetzte Wellenlinie mit C_3 u.s.w. Jede Kurve C_n enthält die Kontaktpunkte aller vorhergehenden und dann noch die doppelte Anzahl

neuer. Die Frage ist:

Was ist C_∞, der Ort aller Kontaktpunkte und aller Verdichtungsstellen von Kontaktpunkten, also die Punktmenge, welche das Aggregat der unendlich vielen inneren Vierecke von dem Aggregat der unendlich vielen äusseren Vierecke abtrennt?

Nennen wir C_∞ schon eine Kurve, so greifen wir dem voraus, was wir noch erst beweisen müssen. Jedenfalls wird sich aber die Bezeichnung rechtfertigen, wir werden geradezu folgende Sätze beweisen:

1) C_∞ ist eine Jordan-Kurve, d.h. es ist durch Formeln folgender Art: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ darstellbar, wo φ, ψ die bekannten Eigenschaften haben.

2) In all den unendlich vielen und auf C_∞ über all dichten Kontaktpunkten hat sie die zugehörigen Zentralen zu Tangenten.

3) Die Kurve ist aber keineswegs analytisch (so lange φ_0, wie wir ausdrücklich annahmen, von Null verschieden ist).

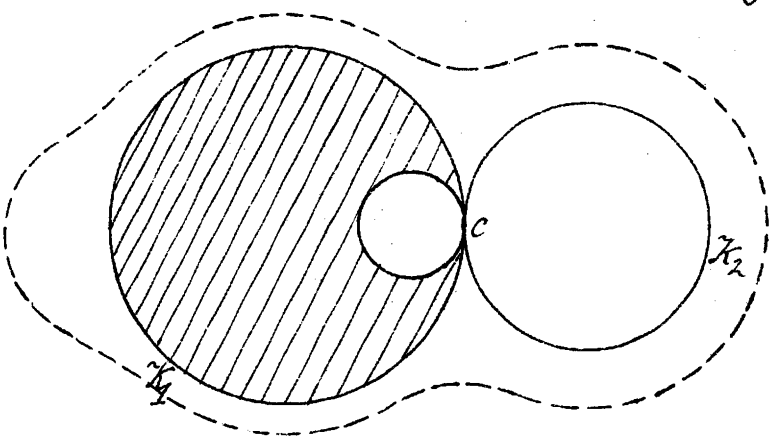
Von diesen Behauptungen beweise ich zunächst die 2te: In jedem Kontaktpunkte c der unendlichen Punktmenge C_∞ hat letztere die zugehörige Zentrale als Tangente.

Dabei verstehen wir unter der Tangente einer Punktmenge in einem Punkte natürlich die Grenzlage, welcher sich die

Sekante, d. h. die Verbindungslinie des Punktes mit irgend einem andern, im Linnes zurückbleibt.

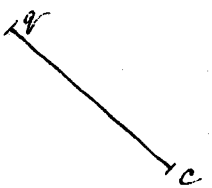
Ich beweise den Satz, indem ich an Betrachtungen anknüpfe, die wir bereits früher anstellten, die ich hier aber in Anlehnung an unsere speziellen Verhältnisse nochmals etwas breiter wiederhole.

Wir haben 2 umfassende Kreise, die sich in dem Kontaktpunkte c, den wir betrachten wollen, berühren und die Ebene in ein Äusseres und Inneres zerlegen.



Wir stellen uns die gesamte Punktmenge C_∞ nun in der Weise her, dass wir uns zuerst Alles das zeichnen oder gezeichnet denken, was davon in das Äussere unserer beiden Berührungskreise fällt, (es ist dies eine Punktmenge, von der wir noch nicht wissen, ob sie eine Kurve in dem von uns definierten Sinne ist, – die zunächst vorzutragende Entwicklung ist davon unabhängig –),

und daß wir die zu entsprechende Figur in den Kreisen K_1, K_2 durch fortgesetzte Inversion nach unserm Fortgangsprinzip vervielfältigen, wobei der Kontaktpunkt c als Grenze auftritt. Die Frage ist: Können wir von einer Tangente im Punkt c reden?

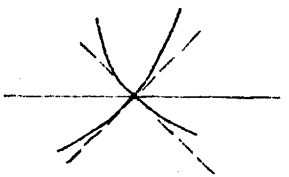


Wir werden dann von einer Tangente der Menge in c reden, wenn eine Sekante $\overline{gc}$, wo g ein beliebiger Punkt der Menge ist, sich beim Heranrücken des g an c einer bestimmten Grenzlage nähert, unabhängig davon, wie wir die Annäherung des g an das c wählen mögen.

Wir sagen jetzt so: Mag g gewählt sein, wie es will, jedenfalls hat es im Aussenraum irgendwo einen äquivalenten Punkt p; denn g ist erhalten, indem wir die Punkte p fortgesetzt den Inversionen an den Kreisen K_1 und K_2 unterwerfen. Es ist also jede Sekante $\overline{gc}$ mit einer Sekante $\overline{pc}$ gemäß unserer früheren Ausdrucksweise „äquivalent," unter p einen Punkt der Aussenmenge verstanden. Daraus folgt aber, daß man alle Sekanten $\overline{gc}$ bekommt, wenn man alle Sekanten $\overline{pc}$ zieht und diese immer wiederholt den Operationen S_1 und S_2 unterwirft. Vermöge dieser Überlegung erhält unsere Ausgangsfrage folgende neue Form:

Was wird aus der Sekante $p\bar{c}$, wenn ich auf sie die Operationen S_1, S_2 unbegrenzt oft anwende? (oben fragten wir, was aus der Sekante $q\bar{c}$ im Limes wird).

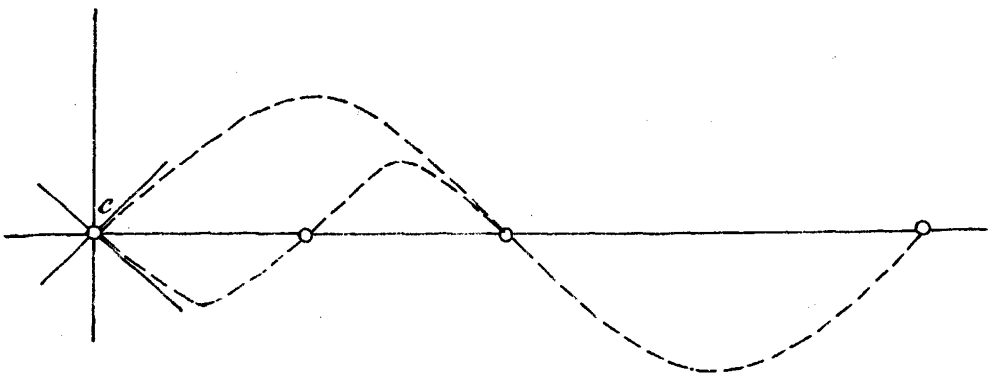
Damit aber kommen wir in den Bereich unserer Entwickelungen auf pg. 263. Wir wissen, daß eine immer wiederholte Anwendung von S_1 und S_2 auf eine ganz beliebige Sekante $p\bar{c}$ die Zentrale als Limes liefert. Daraus folgt dann, daß die Sekante $q\bar{c}$ ihrerseits ebenfalls die Zentrale zum Limes hat, und daß wir also in der Tat die Zentrale als Tangente in c bezeichnen dürfen, q.e.d.



Das Resultat ist amüsant, wenn wir an die successiven Kurven $C_1, C_2 \ldots$ denken. Diese berühren nämlich im Punkte c alternierend die Richtung $\perp g_0$. Der Limes C_∞ aber berührt, wie wir jetzt wissen, die Zentrale selbst. (Es ist, wie bei der Leibniz'schen Reihe, die fortgesetzt zwischen 0 und 1 schwankt, während der Wert ½ dargestellt werden soll.)

Um ein solches Verhalten der Kurven plausibler zu machen, bilde ich folgendes Beispiel, wo Analoges der Fall ist.

Wir legen in der Figur pg. 313 durch c eine Linie,

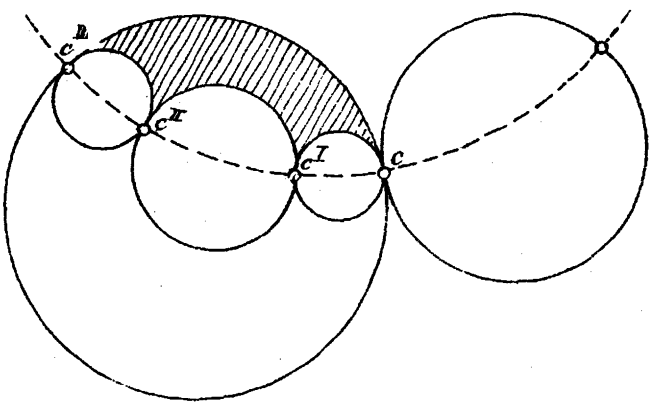


kurve v von der Amplitude ± 1 (die den Kurven $C_1, C_2 \ldots$ insofern ähnlich ist, als sie auch schlangenartigen Typus hat) und lagern daneben eine 2te Sinuskurve von der halben Schwingungsweite und Amplitude, deren erste Schwingung wir nach unten abtragen. Dann konstruieren wir eine Sinuslinie, abermals von der halben Schwingungsweite und Amplitude, deren erste Schwingung wir nach oben abtragen u. s. w. Die Tangenten in c an diese successiven Sinuslinien bilden mit der Ab„ scissenaxe abwechselnd Winkel ± γ_0. Die Frage ist: Welche Tangente hat der Limes C_∞, der offenbar die x-Axe selbst ist? Die Frage verlangt offenbar, genau auf die Reihenfolge der Grenzübergänge zu achten. Nicht die Tangenten der einzelnen Hülfskurven $C_1, C_2 \ldots$ gehen einem Limes entgegen (die springen ja stets), sondern die Kurven selbst haben ihrerseits einen Limes, der im Punkte c eine bestimmte Tangente hat (natür.

lich die x – Axe). —

Wir wissen jetzt von unserer Menge C_∞ (der Kontakt-punkt c und deren Verdichtungsstellen), daß sie in allen Punkten c eine bestimmte Tangente hat. Damit ist aber C_∞ noch keineswegs eine analytische Kurve. Hierüber legen wir uns so:

Es seien wieder 2 sich in c berührende Kreise (aus der Reihe der in unserer Figur auftretenden Kreise) gegeben. In dem einen konstruieren wir ein ebenes Inversions-viereck. Nehmen wir die 4 Berührungspunkte, die so hervorkommen, in der in der Figur angegebenen Weise c, c', c'', c''', so liegen diese auf einem Querkreise, wie wir wissen, der mit der Zentralen in c den Winkel φ bildet.

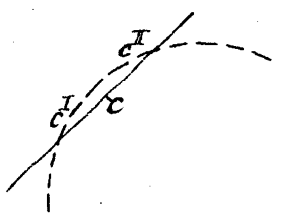


Setze ich dabei von dem Punkte P ab, so haben wir

einen Kreis c, c', c'', der gegen die Zentrale in c unter φ, nem Winkel φ_0 geneigt ist. Wir wenden nunmehr auf unsere Figur die Operation S_1 an, wobei c, c', c'' auf c zurücken und der Kreis, der durch die jeweiligen Punkte tripel bestimmt ist, mit der festbleibenden Zentrale alternierend Winkel $\pm\varphi_0$ bildet. Aber alle diese Punkte $c, c', c'' \ldots$ gehören der Punktmenge C_∞ an. Damit haben wir für letztere folgende Eigenschaft, die bei einer analytischen Kurve (wie ich gleich zeige) nicht eintreten kann:

<u>Man kann in beliebiger Nähe einer gegebenen Punktstelle c noch auf unendlich viele Weisen 2 andere Stellen c', c'' so finden, dass der Kreis, der durch c, c', c'' geht, mit der Tangente in c den Winkel $\pm\varphi_0$ bildet.</u>

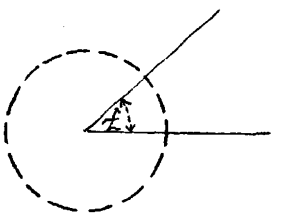
Dieser kann bei einer analytischen Kurve in der Tat nicht vorkommen. Denn wenn man bei einer analytischen Kurve 3 Punkte c, c', c'' durch einen Kreis verbindet und c', c'' auf c zurücken läßt, dann kommt ein bestimmter Limes heraus, nämlich der Krümmungskreis, der als solcher die Tangente in c berührt. Es ist ganz ausgeschlossen, daß unser Kreis hin und her springend einen endlichen Winkel $\pm\varphi_0$ mit der Tan-



gerte einschliessen sollte. —

Immerhin ist nun aber unsere Punktmenge C_∞ eine Jordan-Kurve, wie die oben aufgestellte, noch zu beweisende erste Behauptung lautete.

Wir werden von unserer Punktmenge C_∞ sagen, dass sie eine Jordan-Kurve bildet, wenn wir ihre Punkte x, y ein-eindeutig durch stetige Funktionen φ und χ der t-Werte eines Intervalls der t-Axe darstellen können. Dabei heisst die Zuordnung ein-eindeutig, wenn jedem Punkte des Intervalls ein Punkt der Menge und jedem Punkt der Menge rückwärts ein und nur ein Punkt des Intervalls entspricht.



Wenn wir t als Zentriwinkel in einem Kreis deuten, wodann das in Betracht kommende Intervall von t durch die Peripherie des Kreises gegeben sein mag, so können wir noch mehr geometrisch sagen:

Wir nennen eine Punktmenge eine Jordan-Kurve, wenn sie ein-eindeutig und stetig auf die Punkte der Kreisperipherie abgebildet werden kann.

Die letztere kann nun bei unserer Menge C_∞ einfach in der Weise geschehen, dass wir die Figur von pg. 304 mit der Figur auf pg. 296 vergleichen.

Man ordne nämlich einfach die 4 Ecken des Ausgangs-
vierecks der einen Figur den 4 Ecken des Ausgangsvier-
ecks der anderen Figur in zyklischer Reihenfolge zu und
daran anschliessend die Ecken der Nebenvierecke hier den
entsprechenden Ecken der gegen das Ausgangsviereck
korrespondierend gelegenen Nebenvierecke dort. Vermö-
ge des so formulierten Gesetzes werden ersichtlich die
einzelnen Punkte c der einen Figur ein-eindeutig
den Punkten c der zweiten Figur zugewiesen. Zugleich
ist die Zuordnung eine stetige, weil die korrespondie-
renden Vierecke beiderseits bei der Fortsetzung des Pro-
zesses unendlich klein werden (d. h. kleiner als jede
noch so kleine vorgegebene Kreisfläche). Den Verdich-
tungsstellen der Punkte c der einen Figur entsprechen
also die Verdichtungsstellen der Punkte c in der an-
deren Figur. Aber die Punkte c in Figur auf pg 296
füllen mit ihren Verdichtungsstellen den Orthogonal-
kreis geradeaus. Die Punktmenge C_∞ der Figur auf
pg. 304 ist also ein-eindeutig und stetig den Punk-
ten eines Kreises zugewiesen, womit der hier zu füh-
rende Beweis erbracht ist. Die Punktmenge C_∞ ist
hiernach in der Tat eine Jordan-Kurve. —

Ich habe mit der nunmehr beendigten Betrach-
tung unserer anchonmorphen Figur gewissermas-

[illegible] den Höhepunkt dieser Vorlesung in der idealistischen Diskussion erreicht, und es mag daher geeignet erscheinen, von hier aus einen Umblick über das Resultat, welches sich ergeben hat, zu halten.

Ich habe, indem ich an die Theorie der automorphen Funktionen anknüpfte, durch einen rein-geometrischen Prozeß unter Ausschaltung irgendwelcher arithmetischer Operationen zunächst eine bestimmte, nirgendwo dichte Punktmenge konstruiert und nun in Anlehnung hieran durch Spezialisierung der Ausgangsfigur[1] eine nicht-analytische Kurve hergestellt. Es zeigt sich also, daß diese modernen Ideen auch auf rein geometrischem Wege hervorkommen und keine bloße Fiktion der Analytiker sind. Ich gebe meiner allgemeinen Überzeugung in folgendem Satze Ausdruck: Die modernen Fragen der Mengenlehre kommen überall heraus, wo man präzisionsmathematische Fragestellungen hinreichend weit verfolgt, man kann nicht umhin, auf sie einzugehen.

So ergiebt sich denn für die Geometrie (aber auch für alle anderen mathematischen Disziplinen, die mit der Raumanschauung zu tun haben) folgendes zweiteilige Programm, das meist nur einseitig

[1] Indem ich annahm, daß mit die t Ausgangskreise in zyklischer Reihenfolge berührten.

befolgt, oder doch in seiner Gliederung nicht klar erfasst wird:

1) die Approximationsmathematik als solche ins Auge zu fassen und zu kultivieren,

2) auf der andern Seite aber vor keiner Idealisierung (im Sinne der Präzisionsmathematik) zurückzuschrecken.

Ich möchte sagen: Man soll „das eine tun und das andere nicht lassen."

Ich exemplifiziere, wie diese Auffassung in der theoretischen Mechanik zur Geltung kommt, derjenigen Wissenschaft, die die Raumanschauung näher der Geometrie am meisten verwertet.

Wir haben hier also die Fragen:
Was ist in der theoretischen Mechanik Approximationsmathematik, was ist Präzisionsmathematik, wieweit werden die zweierlei Betrachtungen in der Mechanik konsequent verfolgt, wieweit unklar vermischt?

Es ergiebt sich die Zweiteilung:

a) Man hat eine erste Art Darstellung der Mechanik, die an die Beobachtung anknüpfend nicht über die Grenzen der empirisch Gegebenen hinausgeht. Sie operiert nicht mit Massenpunkten, sondern klei-

nen Körpern u. s. w. Man hat diese Tendenz, über„ all in den Naturwissenschaften nur das zu schildern, was unmittelbar zu beobachten ist, und keine Theo„ rieen von dem zu bilden, was hinter der Erscheinung sein kann, den Namen „Phänomenologie" beigelegt. Indem ich diesen Ausdruck hier acceptiere, ist klar, daß die phänomenologische Mechanik ein Anwendungs„ gebiet der Approximationsmathematik ist. Wie dies im Einzelnen zu verstehen ist, ist aus unsern früheren Darlegungen klar. (Man wird nicht von strengen Grenz„ begriffen reden, bei der Darstellung der Erscheinungen sich eventuell auf die linearen Glieder beschrän„ ken, weil eine so hinreichend genaue Annäherung an die Erscheinung gewonnen wird u. s. w.).

b) Daneben haben wir die idealistische Mechanik, wie ich sie nenne. Wir könnten sie auch als „Metaphy„ sik" bezeichnen, indem wir dabei das Wort in seiner eigentlichen Bedeutung als „hinter der Physik" neh„ men. Sie bildet sich mathematische Ideen, die über die Wahrnehmung hinausgehen, und sieht zu, wie man mit ihnen in vernünftiger Weise operieren kann. Man hat hier wirklich Massenpunkte, deren„ ge Gesetze, nach denen diese Punkte aufeinander wirken, wirkliche Differentialgewichten u. s. w. die„

se idealisierte Mechanik gehört in das Gebiet der Präzisions-mathematik. Da darf man dann auch vor keiner Idealisierung zurückschrecken, man soll Punktmengen allgemeinster Art, nicht analytische Kurven u. s. w. in Betracht ziehen.

Statt die so getroffene Unterscheidung voranzustellen, ist in der Mechanik traditioneller Weise eine andere mathematische Behandlung üblich, die ein mixtum kompositum von a) und b) ist. Sie ist darum üblich, weil man im 18ten Jahrhundert die Unterscheidung von Approximations- und Präzisionsmathematik noch nicht klar ausgeprägt hatte, und diese auch im 19ten Jahrhundert sich erst allmählich durchgerungen hat. Man läßt darum alle Funktionen eo ipso als analytisch gelten und alle Grenzübergänge als vertauschbar („wie es im Paradiese war", Paul du Bois-Reymond).

Nun bin ich stets der Meinung gewesen, daß eine Vorlesung für Anfänger immer in dieser gewissermassen unlogischen Weise gehalten sein muß, bevor aber auf der anderen Seite, daß sobald ein reiferes Verständnis gewonnen ist, die zweite Behandlung d. h. die bewußte Trennung von Präzisions- und Approximationsmathematik auch bei der Re-

klemmen der Mechanik nicht unterlassen werden darf.

Wenn ich im Zusammenhange mit diesen Bemerkungen noch mit einem Worte auf die Behandlung der Mechanik in der Encyklopädie hinweisen darf, so ist klar, daß hier die moderne Auffassung (die ich für meine Person vertrete) nur beiläufig zur Geltung kommen kann. Denn die Referenten sollen über die vorhandene Litteratur, so wie sie vorliegt, berichten und dieselbe nicht in das Schema einer neuen und vielfach fremdartigen Auffassung einzwängen, wie denn überhaupt Zweck der Encyklopädie nur die Sammlung des Materials ist, damit die weitergehende Forschung späterhin nicht mehr, wie leider so oft, durch Unkenntnis der Vorhandenen beengt ist. —

Jedenfalls kommen wir dazu, von unserm Standpunkt aus auch für die Behandlung der Mechanik ein mathematisches Programm zu erfassen, welches ich hoffe in späteren Vorlesungen noch deutlicher vorkehren zu können.

Nun muß ich hier im Zusammenhange aber noch erwähnen, daß es Mathematiker gibt, welche die Idealisierung noch weiter, als wir sie verstehen treiben wollen.

Ich kehre hier zu der Präzisionsmathematik zurück und erwähne ein Buch, das bei seinem Erscheinen ein grosses Aufsehen erregte:

G. Veronese: Fondamenti di geometria, Padova 1891 (deutsch von Schepp, Leipzig 1894).

Veronese's Darstellung ist schwer zu lesen und viel, leicht auch in den Einzelheiten nicht ganz einwandsfrei, aber ein jüngerer italienischer Mathematiker P. Levi-Cività hat in den Rend. della Accad. dei Lincei, Roma 1898 diesen Schaden geheilt.

Ich kann in folgender Weise über den Grundgedanken von Veronese Bericht erstatten:

Wir haben stets gesagt, dass für uns bei allen präzisionsgeometrischen Betrachtungen der moderne Zahlbegriff und die ein-eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten der Geraden und den entsprechend definierten natürlichen Zahlen die Grundlage bildet.

Ob man die so bezeichnete Grundlage akzeptieren will oder nicht, ist an sich keine mathematische Frage, sondern eine Frage der Zweckmässigkeit. Die Mathematik (im engern Sinne) beginnt erst, wenn wir das Axiom (bezw. ein anderes) zulassen. Veronese akzeptiert nun unser Axiom nicht.

Knüpfen wir vielleicht daran an, dass vermöge

der von uns acceptierten Festlegung des Zahlbegriffs $0{,}999\ldots = 1{,}000\ldots$ ist. Wenn wir dies ins Geometrische übersetzen, so heißt dies: In der Annahme, daß die Punkte der x-Axe und die natürlichen Zahlen sich entsprechen, daß der Punkt die Grenze eines unbegrenzt kleiner werdenden Segmentes ist. Dieser nun bestreitet Veronese. Für ihn bleibt ein stets kleiner werdendes Segment stets noch ein Segment, und in einem „aktual" unendlich kleinen Segment lassen sich ihm zufolge noch viele, sogar unendlich viele Punkte unterscheiden. Wo wir also bisher nur einen Punkt haben, hat Veronese noch unendlich viele Punkte. Er unterscheidet sie folgendermaßen:

Er denkt sich Symbole $\eta_1, \eta_2, \ldots$, die aktual unendlich groß sind und mit denen sich in bestimmter Weise rechnen läßt [x], dabei ist η_2 ∞-mal größer als η_1 u. s. w. Er denkt sich ferner einen Ausdruck folgender Art gebildet, wo $\alpha, \alpha, \ldots$ natürliche Zahlen sind:

$$x = \alpha + \frac{\alpha_1}{\eta_1} + \frac{\alpha_2}{\eta_2} + \ldots\ldots,$$

und dieser erst definiert ihm einen Punkt auf der Abszissenaxe. Ihm sind also unsere „rationalen" und „irrationalen" Punkte auf der Abszissenaxe zusammengenommen noch nicht genug, vielmehr

x) Das Nähere siehe eben bei T. Levi-Civitá

schiebt er noch diese durch transfinite Grössen $\eta_1, \eta_2 \ldots$ definierten Punkte ein. Ich gebe das Wesentliche noch einmal in einem bestimmten Satz:

Veronese nimmt an, dass ein Punkt x der Abzissenaxe erst festgelegt ist, durch einen Ausdruck:

$$x = \alpha + \frac{\alpha_1}{\eta_1} + \frac{\alpha_2}{\eta_2} + \ldots ,$$

wo $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ natürliche Zahlen in dem uns geläufigen Sinne sind und $\eta_1, \eta_2, \ldots$ aktual unendliche Grössen von steigender Grössenordnung.

Die erste Frage, die sich hier erhebt ist: Kann man mit solchen Ausdrücken widerspruchsfrei operieren?

Darauf antworte ich:

Während die Darstellung bei Veronese selbst vielleicht nicht ganz präzis ist, hat Levi-Cività gezeigt, dass man mit solchen Ausdrücken x in der Tat widerspruchsfrei rechnen kann, bei geeigneter Definition der Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots$, sodass vom abstrakt mathematischen Standpunkt aus nichts gegen die Sache einzuwenden ist. Man kann aber weiter fragen:

Zugegeben, dass die Sache mathematisch zulässig ist, ist es darum auch zweckmässig sich damit zu beschäftigen?

Damit kommen wir auf die allgemeine Frage:

Welche Fragestellungen sind in der Mathematik

überhaupt zweckmässig?

Theoretisch kann ich natürlich jede Frage aufwerfen und niemand kann mir verbieten, mich mit ihr zu beschäftigen. In Wirklichkeit sind aber nur diejenigen zweckmässig, die mit den anderen Fragen, mit denen ich mich ohnehin beschäftigen muss und mit denen man sich immer der Natur der Dinge entsprechend beschäftigt hat, zusammenhängen. Man kann darauf hinweisen, dass die Mathematik in dem durch diese Formulierung umgrenzten Gebiet genug der noch unerledigten Probleme vor sich hat, und fragen, ob denn ein grosser Teil unserer doch sehr beschränkten Arbeitsenergie darüber hinaus auf neue abstruse Dinge gerichtet werden soll. Vielleicht kann ich auch so sagen:

Sofern ein tiefer erkenntnistheoretischer Bedürfnis vorliegt, das befriedigt wird, wenn man die genannten transfiniten Zahlen studiert, so wird die Beschäftigung mit ihnen gerechtfertigt erscheinen, tut man es aber nur, um etwas Neues zu machen, dann kann die Erweiterung unmöglich wünschenswert sein.

Ich möchte hier noch auf ein Zitat von G. Cantor hinweisen, der einmal sagt:

„Das Wesen der Wissenschaft liegt in ihrer Freiheit."
d. h. die Mathematik kann treiben, was sie will, wenn sie aus ihren Prämissen nur richtige Folgerungen zieht.

Indem ich diesen Cantor'schen Satz theoretisch acceptiere, füge ich eine praktische Einschränkung hinzu, die mir sehr wesentlich erscheint, nämlich daß jeder, der über Freiheit verfügt, auch eine Verantwortung trägt. Ich möchte daher nicht der absoluten Willkür bei der mathematischen Ideenbildung das Wort reden, sondern jedem anheimgeben, daß er dabei das Ganze der Wissenschaft im Auge halten soll.

Ich schliesse hiermit diesen kleinen Exkurs und wende mich wieder dem komplementären Gebiet zu.

II, 3 Übergang zur praktischen Geometrie: a) Geodäsie

Wir sprachen in der letzten Zeit durchaus von Präzisionsgeometrie. Nunmehr gehe ich im Gegensatze dazu zur eigentlichen

praktischen Geometrie

über, d. h. zu derjenigen Geometrie, die es mit der tatsächlichen Ausführung geometrischer Operationen zu tun hat.

Wir unterscheiden zwei Arten praktischer Ta.

tigkeit: Messen und Zeichnen (incl. Modellieren) und dementsprechend auch zwei Arten der praktischen Geometrie:

α) Die Geodäsie (das Vermessungswesen),
β) die zeichnende Geometrie (darstellende Geometrie im weitesten Sinne des Wortes).

Unsere Hauptfrage wird sein: Inwieweit ist in diesen Gebieten die Unterscheidung von Approximations- und Präzisionsmathematik bereits durchgeführt?

Hierauf gebe ich folgende generelle Antwort:

Die Geodäsie ist derjenige Teil der Geometrie, in welchem die Idee der Approximationsmathematik ihre klarste und konsequenteste Durchbildung gefunden hat. Man diskutiert bei ihr unausgesetzt einerseits die Genauigkeit der Beobachtungen und andererseits die Genauigkeit der Resultate, die aus ihnen folgen.

Dagegen ist die zeichnende Geometrie nach Seiten einer rationellen Lehre im Sinne der Approximationsmathematik noch wenig entwickelt. Man pflegt im allgemeinen darauf hinzuweisen, daß selbstverständlich Ungenauigkeiten unterlaufen, die auf ein Minimum zu reduzieren unerläßliche Aufgabe ist. Die Vorschrift lautet dann aber so:

„ Zeichne so genau wie möglich, aber traue dem Resultat so wenig wie möglich " (Finsterwalder).

Ich spreche nun zunächst von der Geodäsie, in dem ich mich dabei vielfach an die Vorträge anschließe, die in dem parallel laufenden Seminar gehalten werden, doch so, daß die hier gegebene Darstellung auch Nichtseminarmitgliedern verständlich wird.

Ich beginne mit der niederen Geodäsie, in der es sich um Ausführung geradliniger Messungen von Dreiecken und Polygonen handelt. Wir überlegen uns, wie in die theoretische Behandlung der Messungen die Ideen der Approximationsmathematik hineinspielen.

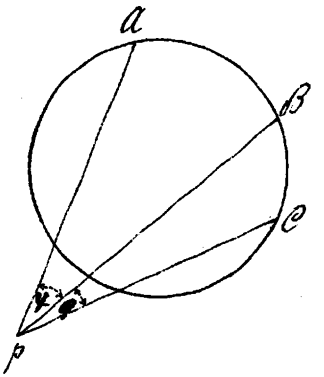
Unsere erste Überlegung muß die sein, daß alle Messungen, die hier in 2 Arten: Basis- und Winkelmessungen zerfallen, mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet sind, die in einer Reihe von Ursachen ihren Grund hat, auf die ich hier kurz hinweise, um sie in dem ganzen Gedankenkreise zu orientieren.

Zunächst kommt die begrenzte Genauigkeit der Instrumente selbst in Betracht, insofern die benutzten Skalen (Strecken und Kreise) nur bis zu einer gewissen Grenze (bestimmten Anzahl Dezimalen, von Bruchteilen einer Millimeters bezw. eines Mi-

mute) genau geteilt sind. Der Weiteren sind aber die Skalen auch störenden Einflüssen, Temperaturänderungen, Durchbiegung infolge der Schwere, chemischen Umsetzungen der Metalllegierung u. s. w. ausgesetzt. Dazu kommen drittens die störenden subjektiven Einflüsse, die den Beobachter treffen, indem die in der Astronomie sogenannte „persönliche Gleichung" hier eingreift. Schliesslich sind auch die zu messenden Dinge nicht scharf gegeben, insofern die Visierlinien d. h. die Bahnen der Lichtstrahlen, soweit atmosphärische Strahlenbrechung in Betracht kommt, keine gerade Linien sind. u. s. w.

Durch derartige lästige Umstände kommt es hervor, dass die Messungen nicht genau sind. Wie gross der jeweilige Spielraum ist, innerhalb dessen die einzelne Messung unbestimmt ist, mag weiterhin erwogen werden. Fragen wir uns vorab, wie weit aus Daten, die begrenzte Genauigkeit haben, andere Grössen berechnet werden können, insbesondere welche Genauigkeit diese zu berechnenden Grössen haben werden.

Hierüber kann man zunächst rein theoretische Untersuchungen anstellen, und es ist im Seminar als typisches Beispiel die in der Geodäsie sogenannte Helmert'sche Aufgabe zur Behandlung gekommen.



Ich kann sie kurz so charakterisieren: Gegeben sind drei feste Punkte A, B, C (z. B. 3 Seezeichen an der Küste), die Aufgabe ist, die Lage eines anderen Punktes p (Schiff auf dem Meere) dadurch zu bestimmen, daß man von p nach A, B, C visiert und so die beiden Winkel A p B und B p C mißt. Das theoretische Problem würde sein:

Wie genau ist p durch die beiden Messungen bestimmt, wofern man jeder einzelnen Winkelmessung die gleiche Ungenauigkeit zuschreibt?

Da wird nun ein Umstand besonders maßgebend, der hervortritt, wenn p auf dem durch die 3 Punkte A, B, C gehenden Kreise liegt. In diesem Falle sind die beiden Winkel φ und ψ für jede Lage von p auf dem Kreise gleich. Man kann also durch Angabe der beiden Winkel φ und ψ p in diesem Falle überhaupt nicht festlegen, vielmehr kann er auf dem betreffenden Kreise eine ganz beliebige Lage einnehmen. Wir drücken dies so aus:

Es gibt beim Pothenot'schen Problem einen gefährlichen Kreis, nämlich den Kreis, der durch A, B, C geht.

Wenn Sie dies überlegen, daß ein solcher Unbestimt-

heitskreis existiert, dann verstehen Sie, wie eine kleine Ungenauigkeit in der Messung der Winkel für einen Punkt p, der nahe diesem Kreise liegt, verhängnisvoll werden kann. Die Winkel γ und γ' für die in der Nähe des Kreises gelegenen Punkte sind nahezu dieselben, also eine Ungenauigkeit bei ihrer Messung für die Bestimmung des Punktes möglicherweise sehr fatal. Wir kommen hier also zu folgendem Schlusse:

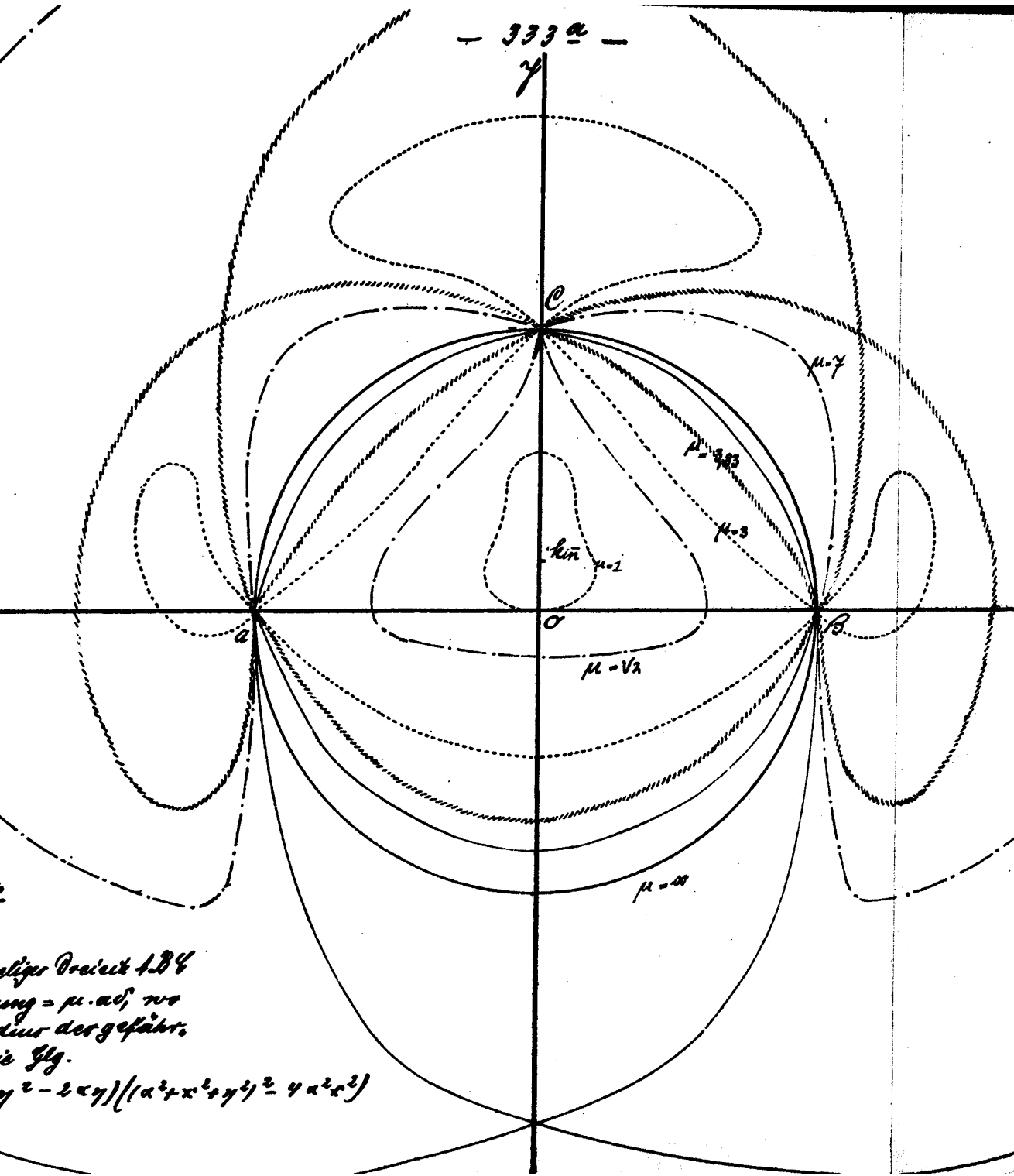
In der Nähe der gefährlichen Kreise wird im allgemeinen durch kleine Ungenauigkeiten der Messungen die theoretische Lage des Punktes ausserordentlich stark beeinflusst werden.

Indem ich wegen der Einzelheiten auf den Vortrag im Seminar *) verweise, äussere ich mich folgendermassen:

Wenn man annimmt, dass die Winkel γ und γ', die man direkt von p aus misst, allemal mit derselben Ungenauigkeit behaftet sind, dann wird die Lage des Punktes p gegen die Punkte A, B, C in den verschiedenen Fällen verschieden genau festgelegt sein: im allgemeinen ganz schlecht, wenn man in der Nähe der gefährlichen Kreise ist, wesentlich besser, wenn man fern davon ist.

Man kann geradezu Kurven gleicher Genauigkeit zeichnen, die die ganze Ebene überdecken, sodass 2 Punkte p und p', die auf derselben Genauigkeitskurve liegen,

*) Vgl. auch W. Jordan: Handbuch der Vermessungskunde 3te Auflage. Stuttgart 1888, Bd. 1, p. 338.



...eliges Dreieck ABC
...ung = μ.aδ, wo
...dius des gefähr.
...ie Glg.
...$y^2 - 2\alpha y)((\alpha^2+x^2+y^2)^2 - 4\alpha^2 x^2)$

durch Messung der Winkel φ, χ mit gleicher Genauigkeit bestimmt sind. Diese Genauigkeitskurven haben nach den Entwickelungen von Jordan die auf der beigefügten Figur verzeichnete Gestalt, aus der hervorgeht, daß in der Tat im allgemeinen in der Nähe der gefährlichen Kreise die Genauigkeit sehr gering, daß sie aber in der Nähe der 3 Eckpunkte Gebiete gibt, wo sie sehr groß wird.

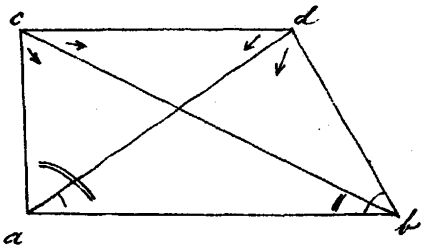
Die so für das Pothenot'sche Problem erläuterte Aufgabe kehrt natürlich bei jeder Aufgabe der Geodäsie wieder. Dabei ist noch völlig unbestimmt gelassen, wie genau die Winkel φ und χ gemessen werden können.

Wie werden wir nun über diese Genauigkeit ein Urteil gewinnen? Dies ist die weitere wichtige Frage. Ich sage so:

Um ein gewisses Urteil über die Ungenauigkeit unserer Messungen zu gewinnen, ist der rettende Anker die Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie sie in der Methode der kleinsten Quadrate ausgebildet vorliegt.

Man sagt so: Man messe mehr Größen als erforderlich sind zur Bestimmung der Resultate und sehe zu, wieweit diese Messungen, die sich gewissermaßen kontrollieren, miteinander stimmen. Aus der Art und Weise, wie sie miteinander stimmen, gewinnt man ein gewisses Wahrscheinlichkeitsurteil dafür, wie genau die Messungen im Einzelnen sind und welchen Spielraum man also dem Resultate vernünftiger Weise belassen soll.

Ich erläutere dies, indem ich auch hier an ein bestimmtes, im Seminar behandeltes Beispiel anknüpfe. Es handele sich darum, ein Viereck festzulegen, von dem die Basis $\overline{ab}$ gegeben sei (die Frage nach der Genauigkeit der Basismessung soll hier also unerörtert bleiben). Man kann durch



je 2 Winkelmessungen in a und b die Punkte c und d bestimmen. Man fügt nun aber, indem man sich nach c und d mit dem Instrumente begiebt, noch die Messungen der 4 mit einem Pfeil markierten Winkel hinzu, so dass man im ganzen 8, statt der 4 notwendigen Winkel hat. Wir fragen dann zunächst, wie genau sind die geometrischen Bedingungen, die zwischen diesen Winkeln aus der Figur bestehen müssen, erfüllt?

Offenbar müssen zwischen diesen 8 Winkeln 4 Bedingungsgleichungen bestehen. Diese stimmen aber, wenn man die gemessenen Winkel einträgt, nur bis auf gewisse Fehler. Man sagt dann, dass in der Messung der 8 Winkel 8 „Fehler" vorgekommen sind, und das allgemein übliche Verfahren ist dann bekanntlich dies, die überzähligen Messungen so zu korrigieren, dass

erstlich die theoretisch vorhandenen Bedingungsgleichungen genau erfüllt werden und dass zweitens die Quadratsumme der an den Messungen anzubringenden Korrekturen ein Minimum wird.

Die Begründung dieser Methode der kleinsten Quadrate, die in die Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört, fällt aus dem Rahmen dieser Betrachtung heraus; wir fahren gleich fort, ihre Anwendung zu besprechen:

Gesetzt wir haben durch Anwendung der Methode zwei bestimmte Lagen für c und d erhalten. Sind dies dann die wirklichen Lagen? Das wäre eine wunderbare Methode, die aus schlechten Beobachtungen richtige Resultate abzuleiten gestattete. So ist die Methode der kleinsten Quadrate nicht aufzufassen. Die Sache ist vielmehr diese:

Nachdem wir die „wahrscheinlichste" Lage für c und d gefunden haben, müssen wir nun weiter an der Hand der Methode der kleinsten Quadrate den Genauigkeitsgrad von c und d diskutieren (wobei natürlich bei der Definition des Genauigkeitsgrades eine gewisse Willkür bleibt; man spricht vom mittleren Fehler, wahrscheinlichen Fehler u.s.w.). Die Folge ist, dass um die gefundenen c und d je ein elliptisches Gebiet resultiert, und dass man mit diesem,

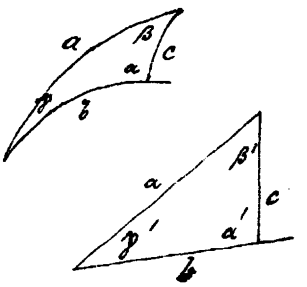
sicher Sicherheit sagen kann, daß die wahren c und d innerhalb der ber. Gebiete liegen. Es kommt also noch die Kunst hinzu, das Resultat der Methode der kleinsten Quadrate jeweils richtig zu beurteilen.

Sie sehen, es handelt sich um eine systematische Lösung bestimmter approximationsmathematischer Aufgaben. c und d genau zu bestimmen, ist gar nicht das Problem, sondern die Frage ist, was ihre ungefähre Lage ist, bez. in welchem Bereiche dieselbe unbestimmt bleibt. Die Methode der kleinsten Quadrate lehrt uns diese Fragen der Approximationsmathematik in bestimmter Weise anzusetzen.

Als weiteren wichtigen Punkt berühre ich hier die Frage nach der Art des numerischen Rechnens, welche man bei solchen Approximationsfragen anzuwenden hat. Wenn man 1 m nur bis auf 1/100 m/m genau gemessen hat, dann hat es keinen Zweck, das Resultat auf 7 Dezimalen genau anzugeben. Ich stelle daher als erste Thesis hier auf:

Bei der numerischen Durchführung der in Betracht kommenden Rechnungen wird man stets die abgekürzte Rechnung benutzen, die nur mit soviel Ziffern operiert, als nach der Lage der Sache Bedeutung haben.

Für die Vereinfachungen der Rechnung, welche von hier aus gegebenenfalls resultieren, wurde im Seminar ein interessantes Beispiel, der sog. „Legendre'sche Satz" aus der sphärischen Trigonometrie behandelt.



Es handelt sich dabei um die Beziehungen, in denen ein sphä„risches Dreieck zu einem ebenen mit denselben Seiten a, b, c steht. Der Legendre'sche Satz besagt, daß z. B„ die Dreiecke, solange man es mit einem kleinen "sphärischen Dreieck zu tun hat, Winkel ha„ben, welche je„ um den 3ten Teil des sphärischen Ex„zesses bezw. von einander verschieden sind. Also:

$\alpha' = \alpha - \varepsilon/3$, $\beta' = \beta - \varepsilon/3$, $\gamma' = \gamma - \varepsilon/3$, wo $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°$.

Auf den Beweis, der mit Reihenentwickelungen zu führen ist [1] und im Seminar vorgetragen wurde, gehe ich nicht ein, ebensowenig auf die ebenfalls im Seminar behandelte Fehlerschätzung. Sie sehen je„denfalls, wie bequem der Satz ist (da man viel leich„ter mit den Formeln der ebenen, als der sphärischen Tri„gonometrie operiert). Ich resumiere so:

Der Legendre'sche Satz ist für die Zwecke des nu„merischen Rechnens eine grosse Erleichterung, und

[1] von denen nur die niedersten Glieder beibehalten werden.

ich gebe diesen Satz als ein typisches und eleganter Beispiel dafür, was Approximationsmathematik ist.

Zuletzt mögen noch einige historische Bemerkungen Platz finden:

In der Geodäsie ist die Methode der kleinsten Quadrate und die abgekürzte Rechnung, der Legendre'sche Satz u. s. w. ungefähr seit dem Anfang des vorigen Jahrhunderts durchweg üblich. Speziell ist es Gauß, der diesen Methoden ihre theoretische Abrundung gegeben hat, und ich will nicht unterlassen, hier ein Diktum zu zitieren, das Klauß auf der „Münchener Naturforscher" Versammlung (1899) gab:

„Jeder Geodät ist mit einem Tropfen Gauß'schen Öls gesalbt",

d. h. er hat darüber nachgedacht, was Approximationsmathematik ist, und wie er vernünftigerweise das empirische Material der mathematischen Behandlung unterwirft.

Dieser Tropfen ist aber der reinen Mathematik seit ungefähr 1860 verloren gegangen. Seit 1860 wendet sich, nach dem Tode von Jacobi, Gauß, Poisson, Cauchy u. s. w. die reine Mathematik von diesen Dingen ab, als ob es etwas Inferiores wäre. In dieser Hinsicht gibt gerade der besprochene Legen-

drei'sche Satz ein vorzügliches Beispiel. Legendre hat seinen Satz ursprünglich in sein (auch heute noch über all verbreitetes) Lehrbuch der Geometrie aufgenommen. In den neuen Auflagen dieses Lehrbuches aber ist er weggelassen, trotzdem die sphärische Trigonometrie als solche ausführlich behandelt wird.*)

Soviel über die niedere Geodäsie. Jetzt wende ich mich zur höheren Geodäsie.

Hier wird die Erdoberfläche als Kugel, oder genauer als ein Ellipsoid betrachtet und es handelt sich vor allem darum, auf dem Ellipsoid die geodätischen Linien zu ziehen. Wir werden fragen, wieweit die Erdoberfläche einem Ellipsoid entspricht und wie trotz der unendlichen Diskontinuitäten der Oberfläche (Berg, Tal, Wald u. Wiese) es möglich ist, den Gedanken der auf dem Ellipsoid verlaufenden geodätischen Linie festzuhalten.

War ich da zu sagen habe, klingt sehr trivial und fast selbstverständlich, weil jedermann sofort für richtig hält und die Praktiker auch unbewußt

*) Ein anderes charakteristisches Beispiel dafür, wie der Sinn für Approximationsmathematik in den letzten Dezennien bei den reinen Mathematikern successive verschwunden ist, gibt der Umstand, daß die modernen Lehrbücher der Analysis die Differenzenrechnung, der man früher hohen Wert beimaß, fast gar nicht mehr berühren.

dementsprechend handeln. Es ist aber wesentlich, dass man sich die Dinge einmal bewusst klar macht, so dass man gegebenenfalls nicht mit Argumenten der Präzisionsmathematik kommt, die als solche hier nicht ausreichen.

Wie ist zunächst die präzise Definition der geodätischen Linie auf einer idealen Fläche?

Bekanntlich hat man 2 Definitionen:

Einmal betrachtet man die Bogenlänge

$$\int \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

und verlangt, dass diese zwischen 2 zu verbindenden Grenzpunkten ein Minimum wird.

Das andere Mal betrachtet man die Oskulationsebene der Kurve und verlangt, dass diese senkrecht zur Tangentialebene der Fläche steht.

Bei beiden Definitionen wird von der Differential- und Integralrechnung Gebrauch gemacht, und diese gründet, wie wir wissen, sich nach der modernen Lehre auf den strengen Grenzbegriff: dx, dy, dz sind nicht kleine Grössen, sondern verschwindende Grössen. Die Frage ist jeweils, was aus den durch die Formeln angedeuteten Beziehungen im Limes wird. Indem ich in üblicher Weise die dx, dy, dz in diesem Sinne als unendlich kleine Grössen bezeichne, haben wir hier als oberstes

Satz:

Bei der präzisen Definition der geodätischen Linie muss eine exakt definierte Idealfläche gegeben sein und dann bedeuten dabei die dx, dy, dz unendlich kleine Grössen, nicht etwa sehr kleine Grössen.

Nachdem wir uns dies vergegenwärtigt, vergleichen wir die Erdoberfläche mit einem Ellipsoid, und zwar hinsichtlich ihrer Eigenschaften im Unendlich-kleinen.

Natürlich kann man im Grossen die Erdoberfläche mit einem Ellipsoid vergleichen, wie die Arbeiten der Geodäten dargetan haben, vergl. z. B. die neueste Publikation von W. Börsch[1] in der von der Vergleichung von Mitteleuropa, als des best vermessenen Teils der Erdoberfläche, mit einer Ellipsoidschale gehandelt wird. Aber im Kleinen (nicht nur im sehr Kleinen) stimmt das garnicht. Wollen wir z. B. eine Tangentialebene an die Erdoberfläche legen, so muss gemäss den Ideen der Präzisionsmathematik verlangt werden, die kleinen Variationen der Oberfläche in Betracht zu ziehen. Da ist aber gar keine glatte Fläche vorhanden; der ganze Verlauf ist höchst irregulär. Wenn wir nur die kleinen Dimensionen in Betracht ziehen, die man sieht (Unterschied von Berg und Tal, Unregelmässigkeiten der

[1] Bericht über die Lotabweichungs-Bestimmungen, Verhandl. d. intern. Erdmessung, Stuttgart 1898.

Bodenfläche, wechselnde Vegetation u. s. w.), so wird einem die Unmöglichkeit der Sache schon klar. Vieviel mehr, wenn wir noch weiter gehen (wie das doch die strenge Definition verlangt) und genötigt sind, den zelligen Aufbau der Organismen, ja die molekulare Struktur der Materie zu berücksichtigen. Da ist von einem überhaupt keine Rede, nicht einmal von einer strengen Fläche, sondern nur von einer Raumschicht, deren Querdimension gegen ihre sonstige Ausdehnung zurücktritt. Wir müssen sagen:

Wenn wir die Erde mit einem Ellipsoid vergleichen so bezieht sich das gar nicht auf die Differenzenquotienten bei kleinen Differenzen, geschweige denn auf die Differentialquotienten (die wir als Limiten der Differenzenquotienten auffassen.)

Und ich fahre fort, um es noch etwas lebendiger zu fassen:

Praktisch ist das, was Oberfläche heissen soll, überhaupt nicht exakt definiert, weil nicht feststeht, welche Teile wir zur Erdmasse hinzuzählen sollen. Jedenfalls aber werden, wenn wir Differenzenquotienten in kleinen Dimensionen bilden, diese auf das äusserste hin- und herschwanken.

Sie sehen, wie wir die Annäherung an ein Ellipso-

id jedenfalls nicht auffassen dürfen. Im sehr kleinen stimmt es nicht. Es stimmt aber wie ich behaupte, angenähert, wenn wir den Differenzen, die in den Differenzenquotienten auftreten, eine bestimmte Grössenordnung vorschreiben.

Wir denken uns ein flaches Terrain (ein gebirgiges würde die Sache komplizieren) indem wir einen scharfen Horizont etwa auf 10 km. zu sehen glauben. Die Ebene, die wir dann durch das Auge parallel zum Horizonte legen, dürfen wir mit der Tangentialebene des Ellipsoids vergleichen. Allgemeiner werden wir sagen:

Wenn wir bei der praktischen Bestimmung (von der jetzt im Zusammenhang mit der geodätischen Linie des Ellipsoides gehandelt werden soll) im Grossen Δx, Δy, Δz und deren Verhältnisse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ einführen, so denken wir uns die Δx, Δy, Δz, oder vielmehr $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, als Stücke von etwa 10 km Länge. Die dann entstehenden Differenzenquotienten können als Annäherung an die Differentialquotienten des Ellipsoids gelten (in demselben Sinne wie die Tangentialebene des Ellipsoids annähernd durch die Horizontlinie, die wir beobachten, gegeben ist.)

Für ein gebirgiges Terrain müssen wir natürlich vorab eine Abgleichung oder Nivellierung der Berge

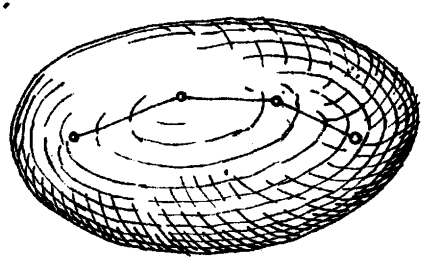
und Täler voraussetzen, um in ähnlicher Weise die Verhältnisse zu entwickeln.

Dies stimmt alles mit dem, was ich früher bei der gezeichneten Kurve ausführte, dass wir, wenn wir bei einer solchen Kurve von einer Tangente reden, diese nicht schlechtweg durch den Differenzenquotienten (oder gar Differentialquotienten, den es gar nicht gibt), sondern durch den Differenzenquotienten bei bestimmter Grössenordnung der Differenzen beurteilen u. s. w.

Nachdem wir uns hierüber geeinigt, fragen wir, was denn die geodätische Linie auf dem Ellipsoid für die praktischen Messungen nützt. Dass wir eine geodätische Linie auf dem Ellipsoid nicht mit der kürzesten Linie vergleichen können, die wir uns auf der Erdoberfläche empirisch herstellen, indem wir alle dort erkennbaren Details in Betracht ziehen, ist klar.

Vielmehr glaube ich Ihnen folgende Formulierung vorschlagen zu sollen, die genau dem entspricht, was die Geodäten wirklich machen.

Ich will neben das Wort „geodätische Linie" das Wort „geodätisches Polygon" stellen. Dabei mag unter einem geodätischen Polygon einer gege-



benen Fläche ein der Fläche einbeschriebenes geradliniges Polygon von gegebener Grössenordnung der Seiten verstanden sein, welches im übrigen geodätisch ist d.h. es soll das kürzeste Polygon seiner Art zwischen den beiden betrachteten Endpunkten sein, oder die Osculationsebene in den Eckpunkten des Polygons soll gegen die Tangentialebene der Fläche in den Eckpunkten jeweils senkrecht stehen.

Ein solches geodätisches Polygon denken wir uns nun zuerst beim idealen Erdellipsoid. Dabei wählen wir die Seitenlänge gleich 10 km. Wir erhalten so ein ganz bestimmtes Polygon, dessen Betrachtung in das Gebiet der reinen Mathematik gehört, indem wir ja bei seiner Definition von ganz bestimmten Voraussetzungen ausgehen.

Auf der andern Seite hat es gar keine Schwierigkeit auf der empirischen Erdoberfläche, natürlich mit der Genauigkeit, die durch die Verhältnisse gegeben ist, ein geodätisches Polygon, dessen Seiten etwa je 10 km messen, tatsächlich herzustellen. Man hat nur von einem Punkte nach dem andern zu visieren und dafür zu sorgen, dass die Ebene zweier von demselben Eckpunkte auslaufenden Visierlinien stets senkrecht auf der Tangentialebene steht, die uns

durch den Horizont definiert ist.

Und nun ist die Meinung der Geodäten, worin sie zweifellos recht haben, zunächst die, dass ein solches empirisches Polygon mit dem theoretischen Polygon beim Ellipsoid nahezu zusammenfällt. Die Entscheidung hierüber müssen wir durchaus den Geodäten überlassen. Des Weiteren aber postulieren sie stillschweigend einen Satz der reinen Mathematik, der besagt, dass das betr. Polygon beim idealen Ellipsoid also eine Annäherung an die geodätische Linie des idealen Ellipsoids aufgefasst werden kann. Dies ist ein Theorem der Approximationsmathematik, welches zu prüfen in unsere Domaine fällt. Daher sage ich so: Damit von rein mathematischer Seite alles bereit gestellt ist, was die Geodäten gebrauchen, genügt es nicht, die geodätischen Linien auf dem Erdellipsoid an der Hand der modernen Differential- und Integralrechnung durch strenge Grenzforderungen zu definieren, sondern man muss noch abschätzen, wieviel eine solche geodätische Linie in ihrem Verlaufe abweicht von einem geodätischen Polygon von ca 10 km. Seitenlänge, das man dem idealen Erdellipsoid einbeschrieben mag.

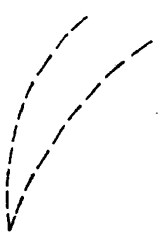
Da wäre also die Frage: Ist dies irgendwo in der

Litteratur behandelt oder nicht, so daß sich auch hier wieder eine bedauerliche Divergenz zwischen den Leistungen der Theorie und den Anforderungen der Praxis ergeben würde? Hierauf ist zu antworten, daß die Sache allerdings vorhanden ist, aber nicht unter den Gesichtspunkten, die uns hier interessieren, sie sollte eigens für die vorliegenden Zwecke dargestellt werden.

Damit berühre ich folgendes:

Ich fasse die Sache etwas allgemeiner und spreche überhaupt von Kurven, die durch Differentialgleichungen definiert werden, wobei ich mich der bequemen Ausdrucksweise wenn auf Differentialgleichungen 1ter Ordnung mit 2 Variablen beschränke: $y' = \varphi(x\,y)$.

Nach Cauchy kann man dann auf die Existenz eines Integrals der Differentialgleichung schließen, indem man sich ein Polygon von Elementen x, y, y' konstruiert, die den



vorgelegten Gleichungen genügen, und sich überzeugt, daß ein Linienzug dieses Polygons bei wachsender Seitenzahl unter gleichzeitiger Verkleinerung der Seiten existiert. Bei diesem Gedankengange von Cauchy ist nun das, was wir suchen, implicite vorhanden, aber in eine an-

dere Beleuchtung gerückt:

Cauchy gebraucht den Vergleich zwischen der Kurve und den Polygonen, das soll heißen die Abschätzung der Unterschiede, die zwischen Kurve und Polygon vorhanden sind, um daraus auf die Existenz der Integralkurve zu schließen. Wir dagegen werden dieselben Abschätzungen benutzen wollen, um daraus die Berechtigung abzuleiten, (für unsern speziellen Fall gleich ausgesprochen), das empirische geodätische Polygon auf der empirischen Erdoberfläche nicht durch das theoretische geodätische Polygon, sondern durch die geodätische Linie des Erdellipsoids approximativ darzustellen. Ich sage überhaupt:

Was wir für den speziellen Fall aussprachen, trifft allemal zu, wenn es sich darum handelt, Dinge der empirischen Welt mit der auf den exakten Grenzbegriff gestützten Differential- und Integralrechnung zu behandeln. Oder noch bestimmter:

Dieser Gedankengang ist notwendig, um die reine Mathematik in ihrer modernen Form, wo die Differential- und Integralrechnung auf den genauen Grenzbegriff gegründet ist, mit den Anwendungen in Kontakt zu halten. Das Bindeglied ist dasjenige Kapitel der Approximationsmathematik, das

in den letzten Dezennien so vernachlässigt ist, eine rationell entwickelte Differenzenrechnung.

In einem Anhange spreche ich nun noch von der sog. Geoidfläche.

Bei dem Geoid handelt es sich um die Niveau„ fläche der Schwere, und zwar stellt sich der Ansatz nach der Lehre von der Newton'schen Anziehung so dar:

Wir haben ein Potential

$$\int \frac{\varrho\, dk}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2),$$

das Integral erstreckt über alle Massenteilchen $\varrho\, dk$, u.s.f. Volumteilchen dk der Erdmasse. Der zweite Term tritt hinzu infolge der Winkelgeschwindigkeit ω, mit der die Erde um ihre Axe, die wir mit der z - Axe zusammenfallen lassen, sich dreht (= Potential der Zentrifugalkraft). Setzen wir nun diesen Ausdruck gleich V, so gibt uns V = konst die Niveauflächen der scheinbaren Schwere (die aus Zentrifugalkraft und wahrer Schwere zusammengesetzt ist). Man bekommt die Kraftkomponenten dieser scheinbaren Schwere, wenn man setzt:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Für die Gestalt dieser Niveauflächen V = konst hat man nun den Namen „Geoid" eingeführt (abgeleitet von $\gamma\tilde{\eta}$). Natürlich gibt es entsprechend den verschiedenen Werten der Konstanten eine ganze Schar Geoidflä„

chen, unter denen man eine, die durch einen festgewählten Punkt (Nullpunkt des Pegels von Amsterdam) geht, als Hauptfläche wählt.

Die Frage ist: Wie verlaufen die Geoidflächen, was weiss man von ihnen, was kann man von ihnen wissen?

Hier muss ich zunächst über ein Resultat der neueren Messungen berichten, durch welches frühere Annahmen korrigiert wurden.

Indem man früher eine gleichmässige Verteilung der Massen im Erdinnern voraussetzte und dann die in den sichtbaren Erdteilen aufgehäuften Massen neben den Wassermassen der Ozeane rechnerisch in Betracht zog, fand man, dass sich die Geoidflächen über den Kontinenten und Gebirgen stark in die Höhe wölbten. Man hat Erhöhungen von 200–400 m. herausgerechnet; vergl. z. B.

Helmert: Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Leipzig [illegible]

Hierin rechnet Helmert z. B. für die Peripherie von Süd-Amerika aus der genannten Annahme eine starke Lotabweichung heraus, die nach dem Kontinente zu stattfindet, so dass die Niveaufläche, die doch senkrecht zu diesen Richtungen stehen muss, sich empor-

hebt, war im Ganzen eine Erhöhung von 440 m ergiebt.

Die neueren Messungen über die Intensität der Schwerkraft aber haben gezeigt, dass die hierbei zugrunde gelegte Annahme durchaus falsch ist, dass vielmehr in allgemeinen unterhalb der Kontinente und grossen Gebirge sich Massendefekte befinden, durch welche das Fehlen der Masse, welches nach aussen hervorragt, kompensiert wird. Man hat sich da natürlich keine Höhlungen zu denken, sondern leichtere Gesteinsmassen, so dass es ungefähr so ist, als befänden sich die sichtbaren Massen der Erdoberfläche auf einer flüssigen Unterlage in hydrostatischem Gleichgewicht.

Dies ist das allgemeine Resultat, das allerdings im Einzelnen die mannigfachsten Abänderungen erfahren kann. Jedenfalls aber erscheint infolge dieser neuen Untersuchungen die Geoidfläche vielmehr abgeglichen, als man vor 20 Jahren voraussetzte. Sie weicht allerdings gelegentlich um viele Meter von der theoretischen Ellipsoidfläche ab, aber dies gerade in Gegenden, wo man es am wenigsten vorraussetzt![1] Natürlich fehlen für einen grossen Teil der Erdoberfläche noch die entscheidenden Messungen.

Des ferneren handele ich von den Hügeln, die man

---

[1] Vergl. die neueren Publikationen von Helmert in den Berliner Berichten seit 1900, auch geogr. Zeitschr. Bd. 6 (1900)

hat, den Verlauf der Geoidflächen tatsächlich festzulegen. Ich führe da speziell an:

a) Die astronomischen Ortsbestimmungen. Sie geben uns für jeden einzelnen Punkt die Richtung der Normalen und damit die Tangentialebene der durch ihn gehenden Niveau- resp. Geoidfläche.

b) Die Schweremessungen mit dem Pendel. Die Schwere hängt natürlich von den Kraftkomponenten X, Y, Z ab. Wollen wir die gesamte Kraft in der Richtung der Normalen, so haben wir $P = \frac{\partial V}{\partial n}$ zu bilden, wo n die Normale in dem betrachteten Punkte ist. Bei den Schwieremessungen misst man nun das P, so dass uns eine solche Messung darüber orientiert, wie dicht die Niveauflächen V = konst. an der betrachteten Stelle aufeinanderfolgen. Wo der Betrag der Schwere geringer ist, da sind die Geoidflächen sozusagen aufgebläht, da wo der Betrag der Schwere grösser ist, sind sie auseinandergedrängt (P nimmt umgekehrt proportional mit dn zu und ab.)

c) Das dritte sind die direkten geodätischen Messungen in horizontaler und vertikaler Richtung von Punkt zu Punkt. Diese fixieren (theoretisch zu reden) die verschiedenen Punkte der Oberfläche, an denen beobachtet ist, vollkän in ihrer relativen Lage

zu einander.

Man kennt also (vollständige Beobachtungen vorausgesetzt) ausser der relativen Lage der einzelnen Punkte die Tangentialebenen der durch sie gehenden Niveauflächen und den Differentialquotienten der Potentialfunktion. Das mathematische Problem ist, wenn alle Messungen mit der erreichbaren Genauigkeit gemacht sind, daraus den Verlauf der Geoidfläche nach Möglichkeit exakt zu bestimmen.

In dem Vordersatze sage ich schon: wenn alle Messungen so genau wie möglich gemacht sind; sie sind es natürlich nicht, mit Ausnahme einzelner bevorzugter Länder. Also: Das empirische Material hierfür ist nur erst für einen kleinen Teil der Erdoberfläche genügend zusammengetragen und fehlt für die von dem Ozean überdeckten Teile noch vollständig.

Indem ich hier garnicht weiter auf die einzelnen Beobachtungen eingehe, die zu behandeln in die Geophysik gehört, will ich als einzelnes Resultat von aktuellem Interesse hervorheben, dass Vening Meinesz auf seiner Expedition auf dem Polarmeere Schweremessungen ausgeführt hat, dort in Übereinstimmung mit der Vermutung normale Schwere gefunden hat.

Jetzt aber wende ich mich der Abstraktion zu,

matischen Kritik im Sinne dieser Vorlesung zu sein und frage:

Wieweit sind die Geoidflächen überhaupt exakt mathematisch definiert?

Sie wird folgender Satz nicht überraschen, den ich aber ausdrücklich anführe, weil man die Geoidflächen in ausgedehnten Kreisen für etwas Exaktes, womöglich gar für analytische Flächen hält:

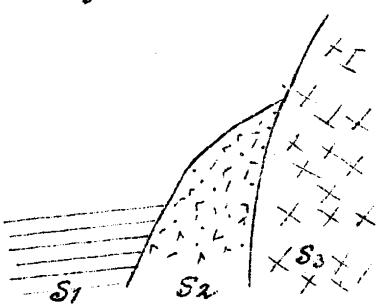
Selbstverständlich ist auch die praktische Definition der Geoidfläche keine theoretisch vollkommene, sondern, wie immer bei praktischen Dingen, eine nur approximative.

Dabei will ich mich nicht in Spitzfindigkeiten verlieren, sondern nur folgendes anführen:

In dem Potential V kommt zunächst ein Integral über alle Massenteilchen der Erde vor. Wir können da fragen, ob das Luftmeer mit einzuschlossen werden soll u. s. w. Alles dies läßt sich nur konventionell festlegen; z. B. mögen wir zur Erdmasse die festen, flüssigen und gasförmigen Massen bis zu 10 km von der Erdoberfläche fortrechnen. Damit haben wir dann die allerdings sehr dünnen, aber auch sehr ausgedehnten Luftmassen, die weiter hinausliegen und in das Medium des Weltenraumes

sich verlieren, weggelassen. Dieselben müssen aber auf das Integral doch einen Einfluss ausüben. Dazu kommt, dass die Massen stets in Bewegung sind (Zirkulation des Wassers, Änderungen des Luftdrucks, u. s. w.), das Potential V also eine Funktion der Zeit wird. Natürlich ist diese zeitliche Änderung unbedeutend, sodass wir praktisch davon absehen können, bei der theoretischen Erwägung aber müssen wir es beachten.

Ich will von meinem Standpunkte aus hier insbesonder eine Arbeit von Bruns 1878: „Über die Figure der Erde" besprechen, die sich durch mathematische Strenge der Darstellung auszeichnet. Ich wünsche zu fragen: Wie stimmt seine Darstellungsweise zu dem, was wir in der gegenwärtigen Vorlesung stets wieder betonen?



Bruns denkt sich die Erde aus verschiedenen Schichten bestimmter Gesteine, Meeren u. s. w. gebildet, wie dies schematisch die Figur andeuten möge. Dabei nimmt er eine kontinuierliche Raumerfüllung durch diese Massen an und setzt die Dichte innerhalb der einzelnen Schichten konstant = $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ an. Über diese Auffassung haben wir schon früher ge-

sprochen, als wir gelegentlich von der Constitution der Materie handelten, und hervorgehoben, dass man besser von Mittelwerten sprechen sollte. Des Weiteren setzt Bruns voraus, dass die Begrenzungsflächen der einzelnen Aggregate sämmtlich analytisch seien, (was wieder der von mir dargelegten Auffassung, derzufolge „analytische Flächen" in der Natur überhaupt nicht vorkommen, widerstreitet, und also nur sehr cum grano salis zu verstehen ist.) Ich rekapitulire vielleicht so:

Die Annahme, dass die Masse der Erde aus homogenen Stücken verschiedener Continua besteht, die mit analytischen Flächen aneinander grenzen, ist sicher keine genaue Schilderung der Wirklichkeit, sondern nur approximativ zu verstehen.

Auf die genannten Voraussetzungen wendet Bruns nun die Formeln und Sätze der idealen Potentialtheorie an und fragt sich, wie nach den Lehren dieser präzisen Potentialtheorie die Niveauflächen verlaufen. Er kommt so zu dem Schlusse, dass jede Geoidfläche, soweit sie in demselben Ausgangsmaterial verläuft, ein analytisches Flächenstück vorstellt und dass da, wo an der Grenze der Materialien 2 solche analytische Flächen aneinander stoßen, kein Knick ein-

tritt, wohl aber eine Diskontinuität im Krümmungsradius. (Das Letztere kommt dadurch heraus, daß die ideelle Potentialtheorie für den Übergang aus einem Medium in ein zweites Kontinuität der ersten, dagegen Diskontinuität der zweiten Differentialquotienten ergiebt.)

Wir fragen, was diese Ergebnisse von Bruns (oder überhaupt alle ähnlichen theoretischen Entwickelungen) für die praktischen Messungen zu bedeuten haben, da doch die Voraussetzungen im strengen Sinne des Wortes nicht gelten resp. nur als approximative Schilderungen der wirklichen Verhältnisse gelten können. Indem ich daran erinnere, welche Bedeutung der geodätischen Linie wir für die Messungen auf der Erdoberfläche erkannten, gebe ich folgenden Satz:

Wir werden nach einer Interpretation der Bruns'schen Resultate suchen, die derjenigen ähnlich ist, die wir oben für die praktische Bedeutung der auf dem Ellipsoid zu ziehenden geodätischen Linien gefunden haben.

Ein genaueres Eingehen würde uns aber tief in die Potentialtheorie hineinführen und muß wohl einer besonderen Vorlesung vorbehalten bleiben.

Wir schließen damit unsere Betrachtungen über

Geodäsie. Rückblickend dürfen wir sagen:

Die Geodäsie ist im Allgemeinen ein glänzender Beispiel dafür, was man mit der Mathematik in den Anwendungen machen kann, und wie man es machen soll. Man bekommt selbverständlich alles nur approximativ bestimmt, zugleich aber hat man überall da, wo die Untersuchung zuende geführt ist, das Maß der Annäherung bestimmt.

II, 4 Fortsetzung der praktischen Geometrie B) Zeichnende Geometrie.

Wenn ich mich jetzt zu dem zweiten Zweige der praktischen Geometrie, der zeichnenden Geometrie, wende, so liegen hier die Dinge viel ungünstige. Die zeichnende Geometrie kann entweder als Zeichenkunst eine zeichnerische Darstellung der räumlichen Verhältnisse haben (darstellende Geometrie) oder die Ersetzung des numerischen Rechnens durch die Konstruktion auf dem Zeichenblatte (graphischer Calcul). In beiden Fällen sind unsere alten, gewohnten Überlegungen am Platze: wie stehts mit der Genauigkeit, wie weit sind hier darauf bezügliche Theoreme vorhanden, was bleibt als Desideratum bestehen?

Vor allem muß ich hier den Satz voranstellen:

In der zeichnenden Geometrie ist eine rationelle Fehlertheorie, wie sie in der Geodäsie vorliegt, bisher

nicht entwickelt.

Dabei nenne ich eine Fehlertheorie rationell, welche auf Verwendung von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen basiert ist, so daß wir, um die Genauigkeit einer Konstruktionsmethode zu beurtheilen, sie wiederholt auf dieselbe Aufgabe anwenden und dann die erhaltenen Resultate mit der Methode der kleinsten Quadrate oder sonstwie abgleichen.

Als eine Vorarbeit zu einer solchen rationellen Fehlertheorie construktiver Lösungen mag man die Betrachtungen, die der französische Mathematiker Lemoine vor ungefähr 10 Jahren begonnen und als Geometrographie bezeichnet hat ansehen. Er zählt bei den verschiedenen Lösungen einer Konstruktionsaufgabe, z. B. des Apollonischen Problems, die 8 Berührungskreise an 3 feste Kreise mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, ab, wie oft das Lineal und der Zirkel dabei benutzt werden. Die dabei herauskommende Ziffer bezeichnet dann Lemoine als Maß der Einfachheit resp. Komplikation der Konstruktion. Sie sehen, wie dies mit unseren Betrachtungen zusammenhängt. Je größer die Zahl d. h. je öfter Zirkel und Lineal benützt werden, desto ungenauer wird, allgemein zu reden, die Zeichnung,

sodass man geneigt sein wird, die einfachste Lösung im Sinne Lemoine's zugleich als die genaueste in unserm Sinne anzusehen. Immerhin ist die als mé sure de simplicité dienende Zahl nur ein sehr äusserliches Mass und darum der Ansatz nur erst ein vorläufiger. Denn es werden dabei sehr ungleichwertige Dinge als gleichwertig abgezählt. Beispielsweise ist die Verbindungsgrade zweier sehr nahe gelegener Punkte viel weniger genau bestimmt, als diejenige zweier weiter auseinander gelegener Punkte!

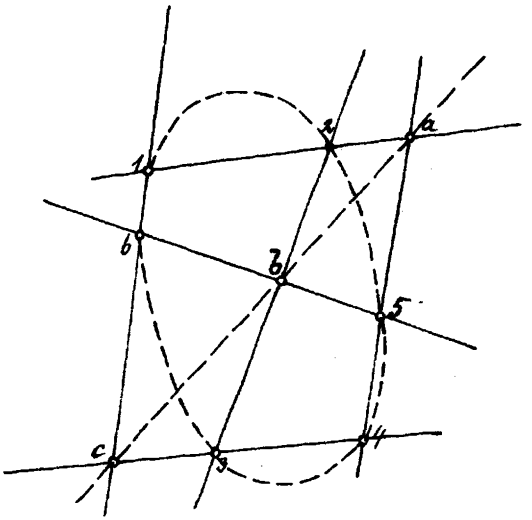
Wie immer man sich aber eine Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen durchgeführt denkt, eins ist klar, sie wird sich nie direkt an abstrakte Sätze der Präzisionsmathematik anschliessen können sondern parallellaufende Theoreme der Approximationsmathematik benötigen. [2]

Ich erläutere dies an einem charakteristischen Beispiele. Es möge sich um die zeichnerische Wiedergabe des Pascal'schen Sechsecks bezw. des zugehörigen Pascal'schen

---

[1] Vergl. auch R. Hilling. Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene, Dresden, Programm der Gymnasiums zum heiligen Kloster, 1899. Ergiebt u.a. Hülfskonstruktionen, deren Zweck es ist nur ungenau auszuführende Operationen, wie z.B. Verbindung zweier nahgelegener Punkte durch eine Gerade, zu vermeiden.

[2] Vergl. jetzt als Ansatz in dieser Richtung:
K. Fink, Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Diss. Königsberg 1905 u. Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen, Z. f. Math. u. Phys. 53 (1906) p. 1ff [Zusatz vom Jan. 1906]



Satzes handeln.

Da mag ein reiner Mathematiker, der nur daran gewöhnt ist, aus strengen Prämissen zu schliessen, und der vielleicht durch langjährige Beschäftigung mit der Arithmetik das Gefühl dafür verloren hat, dass unter Umständen eine kleine Abänderung in den Prämissen auch nur einen kleinen Einfluss auf das Resultat hat, sich wundern, dass bei der zeichnerischen Construktion des Sechecks, wo doch die strengen Prämissen des Pascal'schen Satzes nicht erfüllt sind, die Sache zum Schlusse dennoch leidlich stimmt. Darauf ist zu erwidern, dass allerdings der Pascal'sche Satz als solcher nicht genügt, um dies zu verstehen, sondern dass sich noch eine theoretische Betrachtung approximativ-mathematischer Natur anschliessen muss.

Zunächst gebe ich den Pascal'schen Satz selber: Hat man 6 Punkte 1, 2, 3 ... 6, die auf einem Kegelschnitt liegen und zieht man die Verbindungsgeraden

$$\overline{12} \quad \overline{23} \quad \overline{34}$$
$$\overline{45} \quad \overline{56} \quad \overline{61}$$

und bringt die in dem Schema untereinander stehenden Seiten zum Schnitt, so liegen die Schnittpunkte a, b, c auf einer Geraden.

Diesem Satz gegenüber, der sich auf Grund der gewöhnlich angenommenen Axiome strikte beweisen läßt, stelle ich nun folgenden approximativen, erweiterten Pascal'schen Satz auf:

„Habe ich 6 Punkte, die ungefähr auf einem Kegelschnitt liegen und ziehe ich deren ungefähre Verbindungsgeraden und bringe diese in a, b, c ungefähr auf einer geraden Linie." [Zum Schnitt, daß diese Punkte ungefähr

Ersichtlich ist dieser Satz (und nicht der „ideale" Pascal'sche Satz) die wahre theoretische Grundlage der zeichnerischen Konstruktion.

Den Beweis unseres Satzes kann man in der Weise führen, daß man durchaus analytisch operiert, was aus den früher auseinander gesetzten Gründen für uns das Bequemste sein wird. Wir formulieren zuerst den Pascal'schen Satz selber analytisch, d. h. wir denken uns folgende Entwickelung analytisch durch-

---

[1] Ich nenne diesen Satz kurz weg „approximativ", weil er von Fragen der Approximation handelt. Hat man diese noch erst genauer umgränzt, so ist der Satz selbst nicht nur richtig, sondern überhaupt exakt (wie jeder vollständige Satz der Approximationsmathematik).

geführt:

Haben die 6 Punkte 1, 2, ... 6 auf dem Kegelschnitt die Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; ..... x_6, y_6 und die 3 aus ihnen abgeleiteten Punkte a, b, c die Koordinaten x_a, y_a; ... x_c, y_c, dann besteht die Relation, die aussagt, daß a, b, c auf einer Geraden liegen:

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Nunmehr variieren wir die Koordinaten x_1, y_1; ... x_6, y_6 in $x_1 + \delta x_1$, $y_1 + \delta y_1$; ..... $x_6 + \delta x_6$, $y_6 + \delta y_6$, wo die δ relativ zu den übrigen Dimensionen der Zeichnung kleine Größen sind. Um nun die Sache nicht allzu sehr zu komplizieren, nehme ich an, daß weiter keine Ungenauigkeiten vorliegen, d. h. daß die Verbindungsgeraden scharf gezogen seien und ebenso die Schnittpunkte scharf markiert werden. Dann ist klar, daß die Variationen der Koordinaten der Schnittpunkte a, b, c nur von den $\delta x_1, \delta y_1$; .... abhängen. Wir berechnen uns für diese variierten Koordinaten die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_a + \delta x_a & y_a + \delta y_a & 1 \\ x_b + \delta x_b & y_b + \delta y_b & 1 \\ x_c + \delta x_c & y_c + \delta y_c & 1 \end{vmatrix} = \Delta,$$

die geometrische einen doppelten Dreiecksinhalt bedeutet.

Dieses δ ist natürlich nicht mehr gleich Null, dass es bei geeigneter Annahme klein bleibt, ist zu beweisen.

In der Geodäsie und messenden Astronomie ist ein solches Verfahren ausserordentlich üblich. Da nennt man solche Formeln, wie ich sie hier postuliere, Differentialformeln, so dass wir unsere Forderung auch so wenden können.

Wir müssen nicht nur die Formeln des Pascal'schen Satzes, sondern auch die zugehörigen Differentialformeln zur Hand haben. Dann erst haben wir das genügende theoretische Substrat für die konstruktive Durchführung des Pascal'schen Satzes (oder besser gesagt: für das mathematische Verständnis der konstruktiven Durchführung).

Dabei will ich mich hier noch ein wenig über den Ausdruck: Differentialformel verbreiten, damit sich dem Gebrauch eines solchen Worte unser Gewissen nicht beunruhigt.

Die Unruhe kommt daher, dass es auf der einen Seite heisst, es handele sich bei der Differentialrechnung ausschliesslich um den strengen Grenzbegriff, während auf der andern Seite beim Gebrauch der Differentialformeln kleine endliche Differenzen in Betracht gezogen werden. Dieser Widerspruch gleicht sich folgendermassen ab:

Nehmen Sie den einfachen Fall einer Funktion, die von einer Veränderlichen abhängt $y = f(x)$. Dann heißt es bei dem Praktiker, man entwickele, um $f(x+\delta x)$ zu erhalten, nach dem Taylor'schen Satze und breche bei dem ersten Gliede ab. Also wenn

$$f(x+\delta x) = f(x) + \varphi(x) \cdot \delta x,$$

so setze man $\varphi(x) = \frac{df}{dx}$. Wir müssen die Sache natürlich gewissenhafter fassen und sagen: $\varphi(x) \cdot \delta x$ ist gar nicht das erste Glied der Taylor'schen Reihe, sondern das Restglied, welches ich dem ersten Gliede hinzufügen muß; damit die Formel exakt wird, sodaß $\varphi(x)$ nicht gleich $\frac{df(x)}{dx}$, sondern gleich $\frac{df(x+\vartheta\delta x)}{dx}$ ist $(0 < \vartheta < 1)$, d. h. $\varphi(x)$ ist nicht der Differentialquotient von $f(x)$ an der Stelle x, sondern an einer Zwischenstelle $x + \vartheta\delta x$. Es kommt hier also ein Mittelwert von $\frac{df(x)}{dx}$ hinein. Bekanntlich nennt man die Formel

$$f(x+\delta x) = f(x) + \delta x \cdot f'(x+\vartheta\delta x)$$

das Rolle'sche Theorem, sodaß wir sagen können:

„Wenn wir uns gestatten, bei irgendwelchen abgekürzten Rechnung statt $f(x+\delta x) : f(x) + \varphi(x)\,\delta x$ zu schreiben und wollen unser Gewissen beruhigen, so sagen wir: $\varphi(x)$ bestimmt sich nicht aus der Taylor'schen Reihe, sondern als Mittelwert nach dem Rolle'schen Theorem."

Genauso wie in diesem einfachen Fall ist es bei den Differentialformeln in den komplizierteren Fällen. Praktisch drückt man sich so aus, als dürfte man beim Taylor'schen Satz gegebenenfalls alle höheren Potenzen der Differenzen fallen lassen. Statt dessen sollen wir exakter Weise die Differentialformel als Restformel im Sinne des Rolle'schen Satzes auffassen. Das eine ist von dem anderen praktisch so lange, aber auch nur so lange nicht wesentlich verschieden, als der Differentialquotient $f'(x)$ sich im Intervall Δx nur wenig abändert.

Wenn hiernach das Wesen der Differentialformeln mit dem Gewissen des reinen Mathematikers sehr wohl verträglich ist, bezw. nur kurzer Erläuterung bedarf, so möchte man allerdings wünschen, daß statt Differentialformel der Ausdruck „lineare Differenzenformel" oder auch „Variationsformel" gebraucht würde.

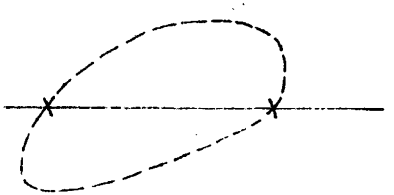
Ich möchte jetzt eine weitere, besonders interessante Frage aufwerfen.

Wir sahen auf pg 254 f, daß wir jede gezeichnete Curve in der Art durch eine Idealcurve ersetzen können, daß nicht nur die Ordinaten, sondern auch die Richtung und Krümmung der empirischen Kurve — soweit diese Dinge überhaupt quantitativ bestimmt

sind — durch die Ordinaten, die Richtung und Krümmung der Idealkurve befriedigend approximiert werden. Kann ich nun aus den gestaltlichen Verhältnissen der empirischen Kurve, die ich vor Augen sehe, entsprechende Eigenschaften der Idealkurve einen Schluss machen?

Für den Weg, den wir bei Beantwortung dieser Frage einschlagen, ist selbstverständlich die oben von mir vertretene Auffassung entscheidend, dass die Idealkurve jenseits der Anschauung liegt und nur eine definitionsmäßige Existenz hat. Ich darf also nicht ausschließlich an die Anschauung appellieren. Vielmehr wird es sich jeweils darum handeln, zu überlegen, ob sich, bezw. weshalb sich die Dinge, die wir bei der empirischen Konstruktion sozusagen in grober Weise vor Augen sehen, vermöge der zugrunde gelegten Definitionen mit aller Schärfe auf das Idealgebilde übertragen

Nehmen wir gleich ein Beispiel.



In der nebenstehenden Figur haben wir eine geschlossene, durchaus convexe Kurve und eine dieselbe schneidende Gerade. Wir bemerken, dass zwei und nur zwei Schnittpunkte auftreten. Werden wir dies als Satz auf die entsprechenden Idealgebilde

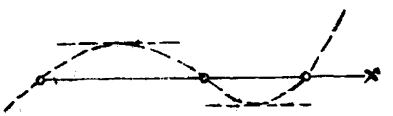
übertragen können?

Wir ersetzen die Gerade der Figur in Gedanken durch eine ideale Gerade, die gezeichnete Curve aber vorerst durch irgend eine approximierende Jordan-Curve (die noch keine Tangenten, geschweige denn Krümmungskreise zu besitzen braucht). Die Anschauung belehrt uns, daß die Idealgrade sowohl durch das Innere als das Aeussere der Jordan-Curve hindurch geht. Also sind nach dem Jordan-schen Satze in der Nähe der Stellen, in denen sich die empirische Curve und die empirische Gerade kreuzen, in der That Schnittpunkte der Idealgebilde vorhanden. Diese Aussage ist aber nur Folge der Definition, durch die wir seinerzeit die Jordan-Curve eingeführt haben. Für die Zwecke der Approximation würden wir die empirische Curve statt durch eine Jordan-Curve ebensowohl durch eine überall dichte, aber nicht abgeschlossene Punktmenge ersetzen können (eine Punktmenge, welche ihre Grenzelemente nicht mitenthält, wie z. B. die Menge der rationellen Punkte der Abscissenaxe). Dann würden die Schnittpunkte, von denen wir reden, nicht notwendigerweise vorhanden sein.

Mit dem Gesagten ist nur erst die Existenz, keineswegs die Zahl der Schnittpunkte festgelegt. Es kann sehr wohl sein, daß da, wo die empirische Figur ei-

nen Schnittpunkt erkennen läßt, die idealisierte Figur deren 3, oder 5, ... aufweist (eine ungerade Zahl muß es sein, weil an der betreffenden Stelle die idealisierte Gerade aus dem Äußeren der Jordan-Kurve in das Innere tritt). Dies ist in der Tat nicht ausgeschlossen, wenn wir die Art der Jordan-Kurve nicht erst noch weiter definitionsmäßig einschränken. man denke an die gestaltlichen Verhältnisse der Weierstraß-Kurve oder der Peano-Kurve. Als solche Einschränkung wählen wir jetzt, daß die Idealkurve in jedem Punkte eine bestimmte Richtung und Krümmung gemäß dem Vorbilde der empirischen Kurve besitzen soll. Insbesondere soll dieselbe ebenso wie die empirische Kurve überall konvex sein und also nirgendwo einen Wendepunkt besitzen.

Daraufhin läßt sich in der Tat beweisen, daß da, wo die empirische Figur einen Schnittpunkt aufweist, auch die Idealfigur nur einen Schnittpunkt besitzt. Wären nämlich 3 oder mehr Schnittpunkte vorhanden, so wähle man die schneidende ideale Gerade als Abszissenachse. Das Kurvenstück zwischen diesen Schnittpunkten wird sich durch eine Gleichung $y = f(x)$ darstellen, wo $f(x)$ eine



mindestens zweimal differentiierbare Funktion ist. Aus der Thatsache, dass $f(x)$ in dem in Betracht kommenden Teile der Abszissenaxe 3 oder noch mehr Nullpunkte hat, folgert man dann nach dem Rolle'schen Satze, dass $f'(x)$ in dem betreffenden Intervalle mindestens einen Nullpunkt besitzt. Dann hätte also unsere Idealcurve einen Wendepunkt, und dieses widerspricht der Voraussetzung, die wir bei ihrer Einführung machten.

In solcher Weise also denke ich mir den Beweis geführt. Die empirische Figur dient zur Orientierung im Grossen; sie hat auch für die feineren Betrachtungen einen grossen heuristischen Wert; schliesslich muss aber der Beweis auf die Begriffsbildungen und Axiome der Präzisionsgeometrie zurückgehen.

In der Litteratur geschieht das Letztere mehr oder minder ausführlich, jenachdem der Autor sein Interesse mehr der genauen Begründung bestimmter Sätze oder der Auffindung neuer Resultate zuwendet. Beides hat seine Berechtigung. Ich nenne als Beispiel für genaue Durcharbeitung der Einzelheiten:

A. Kneser: Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Kurven, Math. Ann. 41 (1893);

anderseits für die Aufstellung zahlreicher neuer Sätze:

Zeuel: Über graphische Kurven, Kopenhagener Abhandlungen 10 (1899).

Ich selbst möchte hier auf eine Untersuchung zurückkommen, die ich vor Jahren über die reellen Wendepunkte der algebraischen ebenen Kurven angestellt habe (1876, Math. Ann. Bd. 10) und bei der ich ausgiebig von anschauungsmässigen Figuren Gebrauch machte. Die zu betrachtende reguläre Idealkurve ist dabei also der weiteren Bedingung unterworfen, algebraisch zu sein, wobei grössere Komplikationen in der weiterhin noch zu schildernden Weise durch die Forderung ausgeschlossen werden, dass es sich jeweils um die allgemeinsten Kurven n^{ter} Ordnung handeln soll, welche die in Betracht kommende Eigenschaft besitzen.

Zunächst ein kleiner Exkurs über die ebenen algebraischen Kurven n^{ter} Ordnung.

Die algebraische Kurve n^{ter} Ordnung (C_n) ist durch eine Gleichung n^{ter} Grades gegeben:

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + \ldots = 0$$

Zählt man die auftretenden Glieder ab und denkt sich die Gleichung durch einen der Koefficienten dividiert, so erhält man $\frac{n(n+3)}{2}$ als Konstantenzahl.

Da entsteht nun die interessante Frage nach der Gestalt dieser C_n. Aus wieviel Ovalen, bezw. anderen Kurvenzügen besteht gegebenen Falls eine C_n? Und wie ist sie mit ihren Singularitäten, insbesondere ihr,

xen Wendepunkten?

Diese ganze Fragestellung bezeichnet ein grosses Kapitel der algebraischen Kurventheorie; insbesondere hat man für die niederen Kurven sehr interessante, dahin gehörige Sätze aufgestellt. Ich kann hiervon an dieser Stelle natürlich keine zusammenfassende Rechenschaft geben, sondern beschränke mich nur auf die Frage nach der Anzahl der reellen Wendepunkte.

Wir schreiben unsere Gleichung kurz $f(x,y)=0$, oder da es für die allgemeine Betrachtung erwünscht ist, die Auffassungsweisen der projektiven Geometrie einzuführen, in homogener Form:

$f(x_1,x_2,x_3)=0$, wo $x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$ gesetzt ist.

Die homogenen Coordinaten wurden in ihrer Bedeutung im letzten Winter ausführlich besprochen, ihr besonderer Zweck ist, die Dinge im Unendlich-Weiten entsprechend den Darstellungsweisen der projektiven Geometrie formal ebenso zu beherrschen, als ob sie im Endlichen lägen.

Fragt man beim Gebrauch von homogenen Coordinaten nach den Wendepunkten, so kommt man auf das Verschwinden der Hesse'schen Determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}.$$

der 2te Derivierten unserer Funktion $f(x_1 x_2 x_3)$. Ist f vom n^{ten} Grade, so ist Δ, da jedes f_{ik} vom Grade $(n-2)$ ist, vom Grade $3(n-2)$.

Bringen wir jetzt $f_n = 0$ mit $\Delta = 0$ zum Schnitt, so erhalten wir nach dem Bézout'schen Theorem $3n(n-2)$ Schnittpunkte; unsere C_n hat also $3(n-2)n$ Wendepunkte ($w = 3n(n-2)$). Dies ist die erste „Plücker'sche Formel" zur Bestimmung der Singularitäten algebraischer Curven. Etwas genauer können wir sagen.

Eine C_n hat, im allgemeinen, $3n(n-2)$ Wendepunkte, weil die Curven $f_n = 0$ und $\Delta = 0$ sich in $3n(n-2)$ Punkten schneiden. Dabei ist vorbehalten zu untersuchen, was eintritt, wenn einige der Schnittpunkte zusammenfallen, insbesondere, wieviele dieser Schnittpunkte von den etwaigen singulären Punkten von $f_n = 0$ absorbiert werden.

Wir haben demnach in den niedrigsten Fällen:

für $n = 2$ $w = 0$,

— $n = 3$ $w = 9$,

— $n = 4$ $w = 24$.

Wenn wir jetzt aber eine C_3 oder C_4 zeichnen, so gelingt es höchstens nur 3 resp. 8 reelle Wendepunkte zu finden, sodass G. Salmon, Higher plane curves bereits die Vermutung ausgesprochen hat, dass nur

⅓ der Wendepunkte also $n(n-2)$ im Maximum reell sein kann. Dies ist die Frage, auf deren Klarlegung wir zustreben:

Man soll womöglich zeigen, daß die Zahl der reellen Wendepunkte einer Cn nicht größer als $n(n-2)$ sein kann, so daß im günstigsten Falle von den vorhandenen Wendepunkten nur ⅓ ins Reelle fällt.

Der gegebenen Formel für die Anzahl der Wendepunkte füge ich hier noch ohne Beweis die Plücker'sche Formel für die Anzahl der Doppeltangenten einer Cn hinzu

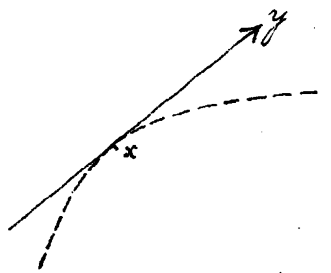
$$t = \tfrac{1}{2}(n-2)(n^2-9),$$

(wobei wieder vorausgesetzt ist, daß die Kurve keine sogenannten singulären Punkte hat, worauf wir sogleich noch zurückkommen).

Vorab beschäftigen wir uns mit der Klasse einer Cn d. h. der Anzahl der von einem Punkte außerhalb der Kurve an diese möglichen Tangenten. Es sind dies ja alles ganz elementare Dinge aus der Theorie der algebraischen Kurven, die ich aber hier entwickeln muß, um die betreffenden Formeln für den Beweis unseres Satzes über die Anzahl der reellen Wendepunkte zur Hand zu haben. Ich wähle die Darstellung also etwas ausführlicher.

Man stelle sich die Gleichung der Tangente in ei-

nem Punkte x der Kurve auf,
indem man mit y die laufen,
den Koordinaten derselben bezeich,
ne. Die Gleichung lautet (beim Ge,
brauch homogener Koordinaten):



$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) y_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) y_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) y_3 = 0,$$ wobei die Klammern andeuten, daß wir bei Bildung der Differentialquotienten den festgezählten Punkt x im Sinne haben. Abkürzend wird also die Gleichung der Tangente im Punkte x in laufenden Koordinaten y:

$$f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0$$

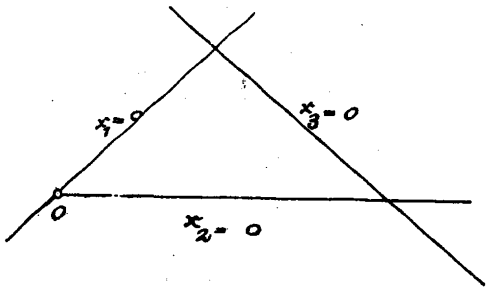
Halten wir aber den Punkt y fest und betrachten x als den laufenden Punkt, so definiert unsre angeschriebene Gleichung offenbar eine Kurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, da die f_1, f_2, f_3 vom Grade $(n-1)$ in x sind. Sie heißt die erste Polare des Punktes y in Bezug auf die Kurve C_n. Es sind also die Punkte x, die ihre Tangenten durch den Punkt y senden, auf eine C_{n-1} beschränkt, d. h. wir finden diese Punkte als Schnittpunkte der Grundkurve mit der zu y gehörigen ersten Polaren. Haben wir entschieden, wie viel solcher Schnittpunkte existieren, so wissen wir wie viel Tangenten von y an die C_n gehen. Nach dem Bézout'schen Theorem folgt aber diese Anzahl k unmittelbar als $n(n-1)$.

Dies ist natürlich eine bloße algebraische Bestimmung der Tangenten d. h. wir machen keinen Unterschied zwischen dem Reellen und Imaginären. Wir müssen aber noch in Betracht ziehen, daß singuläre Punkte der Kurve auftreten können, wodurch sich die die Anzahl reduzieren kann, da mehrere der Punkte x in einen solchen singulären Punkt hineinfallen können und wir nicht gewillt sind, die Verbindungsgerade yx in einem solchen Falle als mehrfache Tangente mitzuzählen.

Die Frage ist also: Wie reduzieren sich die Formeln, wenn singuläre Punkte eintreten? Vorerst was sind überhaupt singuläre Punkte? Hier gebe ich nur das Allerelementarste, soviel wir eben benötigen. Wir definieren geradezu:

Ein singulärer Punkt liegt vor, wenn für einen Punkt x die ersten Ableitungen f_1, f_2, f_3 gleichzeitig verschwinden, also die Gleichung der Tangente für jeden Punkt y befriedigt ist. Ein höherer singulärer Punkt liegt vor, wenn auch höhere Ableitungen entweder Null sind oder bestimmte algebraische Bedingungen erfüllen z. B. $f_{11} f_{12} - f_{22}^2 = 0$.

Welche Bewandnis es mit den singulären Punkten hat, erkennt man am einfachsten, wenn man



das Koordinatendreieck mit einer Ecke in den singulären Punkt legt. Die Gleichung der Kurve wird dann folgendermaßen vereinfacht:

Zunächst läßt sich jede Gleichung n^{ten} Grades nach Potenzen von x_3 so anordnen:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3^n \cdot \varphi_0 + x_3^{n-1} \varphi_1 + \ldots + x_3^0 \varphi_n = 0,$$

wo die $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ homogene Funktionen $0^{\text{ten}}, 1^{\text{ten}}$ $\ldots$ n^{ten} Grades in x_1, x_2 sind. Soll nun der Punkt $x_1 = 0, x_2 = 0$ auf der Kurve liegen, so muß die Konstante φ_0 verschwinden (das Glied 0ter Dimension). Ist der Punkt zu dem im Sinne der gegebenen Definition singulär, so ergibt sich, daß auch die linearen Glieder fortfallen, sodaß die Reihenentwickelung mit den quadratischen Gliedern beginnt:

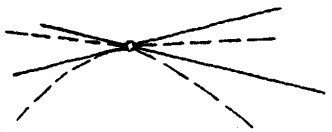
$$0 = x_3^{n-2} \varphi_2 + \ldots + x_3^0 \varphi_n$$

Schreiben wir φ_2 auf, so wird es etwa:

$$\varphi_2 = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2.$$

Ein spezieller Fall ist hier, daß φ_2 identisch verschwindet, ein anderer, daß sich aus $\varphi_2 = 0$ für $\frac{x_1}{x_2}$ eine Doppelwurzel ergibt. Wenn wir aber die Koeffizienten der Kurve nicht weitergehend spezialisieren, als in der Voraussetzung liegt, daß überhaupt ein sin-

gulärer Punkt vorhanden ist, dann liefert die Gleichung $\varphi_2 = 0$ für das Verhältnis $\frac{x_1}{x_2}$ verschiedene Werte. Die Folge ist, daß unsere Kurve n-ter Ordnung dann in O einen „Doppelpunkt" hat, durch den 2 „getrennte Äste" laufen.



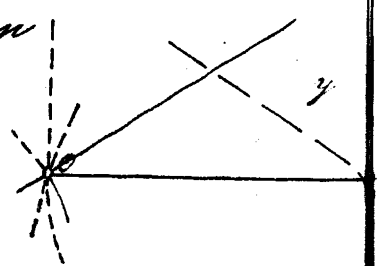
Auf diesen niedrigsten Fall eines singulären Punktes (des „gewöhnlichen" Doppelpunktes) wollen wir uns bei der ganzen von uns zu führenden Betrachtung beschränken.

Wie ein solcher Doppelpunkt auf die Klasse k der Kurve einwirkt, ist sehr leicht zu sehen:

Die Gleichung der ersten Polaren des Punktes y ist:

$$f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0.$$

Hier setze man nun für f den Wert $x_3^{n-2}\varphi_2 + \ldots + x_3^0 \varphi_n = 0$. Man sieht sofort, daß die erste Polare durch den Doppelpunkt $x_1 = 0, x_2 = 0$ einfach hindurch geht, mit einem Aste, dessen Richtung von den durch $\varphi_2 = 0$ gegebenen beiden Doppelpunktstangenten verschieden ist. Der Doppelpunkt absorbiert also 2 der Schnittpunkte der Grundkurve mit der ersten Polare, so daß wir den Satz haben:



<u>Wenn die Grundkurve d einfache Doppelpunkte</u>

bekommt, dann reduziert sich die Klasse k der Kurve um 2d, weil in jedem der Doppelpunkte hinein 2 Schnittpunkte von Grundkurve und Polare fallen, und wir die Verbindungslinie von y mit einem Doppelpunkt x nicht als Tangente von $f = 0$ mitzählen werden.

Das ist alles, was ich über die früheren Angaben hinaus weiterhin von den Plücker'schen Formeln brauche. Ich lasse also die weiteren Fragen bei Seite, welche Plücker behandelt hat: Wieviel Wendepunkte, wieviel Doppeltangenten absorbiert der Doppelpunkt?

Lassen Sie mich vielmehr folgende Bemerkung anknüpfen:

Denken Sie sich f mit willkürlichen Koeffizienten wirklich hingeschrieben, ebenso die 3 Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ (aus denen zusammen $f = 0$ folgt). Hier werden diese letzteren im allgemeinen miteinander verträglich sein oder welche Bedingungen für die Koeffizienten von f müssen erfüllt sein, damit es der Fall ist, damit also ein singulärer Punkt auftritt?

Im Falle einer C_2 können wir das noch leicht anschreiben. Sei:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = f.$$

Hieraus:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f_1 &= a_{11} x_1' + a_{12} x_2' + a_{13} x_3' = 0 \\ \tfrac{1}{2} f_2 &= a_{21} x_1' + a_{22} x_2' + a_{23} x_3' = 0 \\ \tfrac{1}{2} f_3 &= a_{31} x_1' + a_{32} x_2' + a_{33} x_3' = 0 \end{aligned}\right\}$$

Dies sind 3 homogene Gleichungen in x_1, x_2, x_3, die nur verträglich sind, falls die Bedingung:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

erfüllt ist. Wir haben hier den bekannten Satz:

Soll ein Kegelschnitt einen singulären Punkt haben, so muß die Koeffizientendeterminante verschwinden.

Genau entsprechend ist die Sache bei den Kurven höherer Ordnung. Da geben die f_1, f_2, f_3 3 Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, die miteinander verträglich sein sollen. Es muß zu dem Zweck die Eliminationsresultante, oder wie man auch sagt, die Diskriminante D der Grundkurve verschwinden. In dem besonderen Fall der C_2 wird die Diskriminante gleich der Determinante. Indem ich auf das oben gebrauchte Wort „hier vermeide“ sage ich:

Soll eine C_n einen singulären Punkt haben, so muß die Diskriminante ihrer Koeffizienten verschwinden und es hat daher die Kurve im allge-

meinen, d. h. insofern die Koeffizienten willkürlich gedacht sind, keinen singulären Punkt.

Einen ähnlichen Satz können wir für höhere Singularitäten aussprechen; ich knüpfe daran gleich eine weitere Folgerung, indem ich sage:

Damit noch höhere Singularitäten der C_n vorliegen, müssen die Koeffizienten von f außer $D = 0$ noch weitere algebraische Bedingungsgleichungen erfüllen, und es hat also im allgemeinen eine Kurve, wenn $D = 0$ ist, nur einen einfachen Doppelpunkt, der die Klasse der Kurve um 2 Einheiten reduziert; erst weitere Bedingungsgleichungen sichern die Existenz höherer Singularitäten.

Das ist die allgemeine algebraische Grundlage, bei der wir noch nicht das Reelle von dem Imaginären scheiden, ja auch die Koeffizienten in f komplex annehmen dürfen.

Jetzt aber gehe ich dazu über, zu untersuchen, welche Realitätstheoreme sich auf Grund der allgemeinen algebraischen Theorie einstellen.

Wir haben hier zunächst eine Reihe von Verabredungen einzuführen.

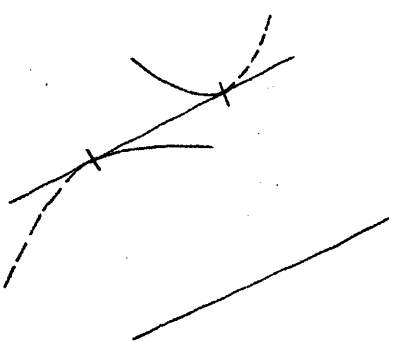
Wir machen die Annahme, daß die Koeffizienten in f reell sind, oder vielmehr reelle Veränderliche,

sodaß wir gleich an die Gesamtheit aller C_n denken und fragen, was sich über die Gestalt der C_n überhaupt aussagen läßt.

Weiter unterscheiden wir die Anzahl der Wendepunkte w in 2 Klassen, reelle und imaginäre, da letztere stets paarweise auftreten müssen, setzen wir $w = w' + 2\bar{w}$.

Ebenso teilen wir die Doppeltangenten in 2 Klassen, reelle und imaginäre. Dabei trennen wir aber die reellen noch wieder in 2 Kategorien, indem wir dabei folgende Unterscheidung denken:

Es können bei einer reellen Doppeltangente die beiden Berührungspunkte reell sein, so daß wir nebenstehendes Bild haben; sie können aber auch imaginär sein, so daß wir für denselben eine isolierte Doppeltangente erhalten. Also:



Die reellen Doppeltangenten zerfallen in solche mit reellen Berührungspunkten, deren Anzahl t' sei, und in solche mit imaginären Berührungspunkten (isolierte Doppeltangenten), deren Anzahl t'' sei. Wir haben daraufhin für die Gesamtzahl t:

$t = t' + t'' + 2\bar{t}$, wo $2\bar{t}$ die Zahl der imaginären Doppeltangenten ist.

Etwas Ähnliches liegt bei den Doppelpunkten vor. Hier werden wir schreiben:

$$d = d' + d'' + 2\bar{d},$$

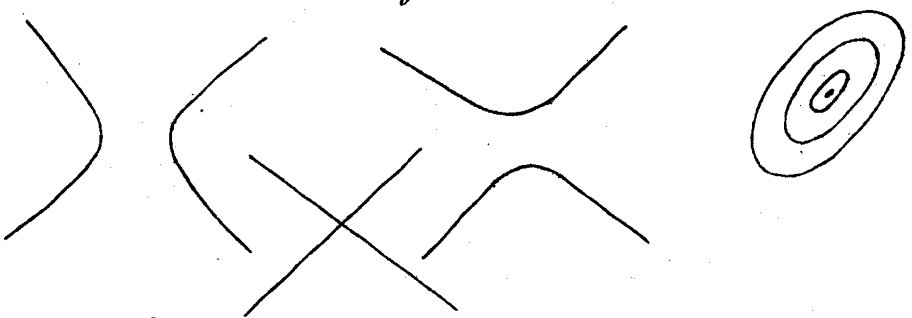
wo $2\bar{d}$ die imaginären Doppelpunkte bezeichnet, die, bei den Realitätsuntersuchungen fortfallen, und d die reellen Doppelpunkte mit reellem Ästen, d' die reellen isolierten Doppelpunkte.

Dies sind alles nur erst allgemeine Verabredungen, wie wir gewisse Buchstaben gebrauchen werden. Wir fragen jetzt zunächst nach der Gesamtheit der Gestalten der C_n mögen nun Doppelpunkte vorhanden sein oder nicht.

Ich erinnere zunächst an die Gestalten im Falle $n=2$.

Wenn kein Doppelpunkt vorhanden ist, so haben wir entweder eine reelle oder imaginäre Kurve. Indem wir uns so ausdrücken, sehen wir die 3 Typen der reellen Kurven: Ellipse Parabel und Hyperbel als nicht wesentlich verschieden an, sofern jeder aus den andern durch eine projektive Umformung hervorgeht. Lassen wir aber doppelpunkte zu, so wird die C_2 entweder in ein reelles oder imaginäres Linienpaar ausarten, im letzteren Falle haben wir für das Auge einen isolierten Punkt. Dabei kann man die Formen in einfacher Weise durch Grenzübergang aus der Hyperbel

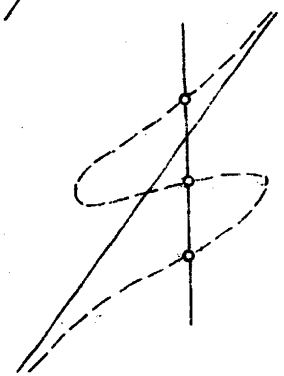
resp. Ellipse herausbringen.



Die Ellipse, Parabel oder Hyperbel bezeichnen wir als Kurvenzüge von paarem Charakter, weil eine Gerade sie entweder in 2 Punkten oder überhaupt nicht schneidet.

Nun zu den C_3

Hier haben wir stets 3 oder 1 Schnittpunkt mit einer Geraden. Daher tritt notwendig ein sogenannter unpaarer Zug auf, wie ein solcher nebenstehend (mitsamt seiner Asymptote) gezeichnet ist. Daneben kann dann gern noch ein paarer Zug vorhanden sein.



Diese Unterscheidung dehnt sich auf die C_n aus, für die wir folgendes, etwas unbestimmtes Bild erhalten:

Eine Kurve C_n ohne singuläre Punkte besteht aus einer endlichen Anzahl von geschlossenen Zügen. Ist n gerade, so haben wir lauter paare Züge, ist n unge-

rade, so liegt neben etwaigen paaren Zügen einem paarer Zug vor, (zwei oder mehr unpaare Züge können nicht auftreten, weil dieselben sich gegenseitig schneiden würden, wodurch die Kurve entgegen der Voraussetzung nicht singularitätenfrei wäre).

Wie das im Einzelnen ist, muss einer besonderen Darstellung, bezw. weitergehenden Untersuchungen überlassen bleiben. Das Schöne aber ist, dass der Theorem über die Wendepunkte, das ich hier vortragen werde, in dieser Hinsicht keinerlei Kenntnisse voraussetzt. Ich behaupte nämlich

Unabhängig von den mannigfachen Formen, die eine singularitätenfreie C_n besitzen kann und die bei wachsendem n in der Tat sehr vielgestaltig sind, gilt bezüglich der Wendepunkte und Doppeltangenten die Relation:

$$w' + 2t'' = n(n-2).$$

Mit dem Beweise dieser Theorems wollen wir uns nunmehr eingehend beschäftigen.

Es ist klar, dass, wenn dies Theorem gilt, $w' \leq n(n-2)$ ist und damit das durch Induktion von Salmon gefundene Resultat über die reellen Wendepunkte richtig ist:

Von der Gesamtzahl der Wendepunkte, die eine C_n

nach Plücker besitzt, kann höchstens der 3te Teil reell sein.

Zum Beweise unseres Theorems entwickeln wir uns vorweg eine gewisse Hülfsanschauung.

Die allgemeine C_n hat, wie wir sehen, $\frac{n(n+3)}{2}$ Konstante. Diese interpretieren wir als Koordinaten eines Raumpunktes in einem höheren Raume und nennen den Raumpunkt den zu der C_n gehörigen „repräsentierenden Punkt". Durchläuft C_n alle reine möglichen Gestalten d. h. variieren die Koeffizienten in $f=0$ beliebig, so durchläuft der repräsentierende Punkt den ganzen Raum von $\frac{n}{2}(n+3)$ Dimensionen. Sie werden sehen, wie nützlich es ist, sich einen solchen Raum zu fingieren und ihn der Gesamtheit aller C_n an die Seite zu stellen, indem es uns nämlich dadurch leichter wird, gewisse Mannigfaltigkeitsüberlegungen anzustellen. Wir sind eben ausschließlich gewöhnt, Kontinuitätsbetrachtungen in Punkträumen vorzunehmen.

Jetzt achten wir in der Gesamtheit der C_n auf diejenigen Kurven, bei denen die Diskriminante D verschwindet, bei denen also mindestens ein singulärer Punkt auftritt (vielleicht auch mehrere). Weil $D=0$ eine algebraische Gleichung ist (sie werde durch

ein Eliminativnsproblem bei algebraischen Gleichungen gewonnen), so schneiden wir vermöge $D=0$ aus dem repräsentierenden Raum von $\varrho/2\,(n+3)$ Dimensionen eine algebraische Mannigfaltigkeit von $\varrho/2\,(n+3)-1$ Dimensionen aus, die ich eine Fläche nenne, (indem ich die uns geläufige Sprechweise von dem R_3 auf den $R_{\varrho/2\,(n+3)}$ übertrage).

Wie ist nun eine solche Fläche in einem höheren Raume gestaltet? An sich können, wenn schon bei den Kurven in der Ebene so vielerlei Gestalten vorliegen (z. B. Peano-Kurve) sehr grosse Komplikationen eintreten. Aber hier ist die Sache einfach, weil wir es mit algebraischen Gebilden zu tun haben. Ich gebe gleich folgenden Satz:

Eine solche algebraische Fläche durchsetzt den Raum mit einer endlichen Anzahl von Windungen und zerlegt ihn in eine endliche Anzahl von Kammern, die in Windungen aneinanderstossen, welche eine Dimension weniger haben als der gegebene Raum selbst. Dies gilt dann insbesondere in unserm repräsentierenden Raume $R_{\varrho/2\,(n+3)}$ für die Fläche $D=0$.

Was sind das nun für Kurven n^{ter} Ordnung der Ebene, bei denen die Diskriminante $D=0$ wird?

Das sind zunächst Kurven mit einem gewöhnlichen

Doppelpunkt, der die Klasse um 2 Einheiten reduziert. Es sind weiter die Kurven mit höheren Singularitäten (wozu ich auch das gleichzeitige Auftreten mehrerer Doppelpunkte rechne). Wenn aber diese höheren Singularitäten eintreten sollen, so müssen außer $D = 0$ noch andere algebraische Bedingungsgleichungen erfüllt sein, die nur in endlicher Anzahl zur Verfügung stehen. Das letztere kommt dadurch heraus, daß es sich stets, solange n selbst endlich ist, um eine endliche Anzahl von Unterscheidungen: ob einige Wurzeln zusammenfallen oder unbestimmt werden u.s.w. handeln wird.

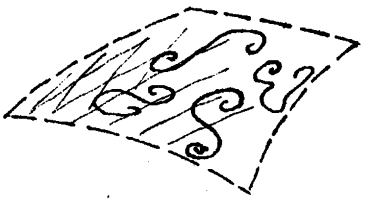
Es ist für unsere folgende Betrachtung besonders wichtig, daß hier nur eine endliche Anzahl solcher Bedingungsgleichungen möglich ist.

Welche Einschränkung erleidet nun diesen Bedingungsgleichungen für die höheren Singularitäten entsprechend der repräsentierende Punkt?

Ich gebe gleich folgenden Satz:

Die repräsentierenden Punkte derjenigen algebraischen Kurven, welche höhere Singularitäten haben füllen auf der Fläche $D = 0$ höchstens „algebraische Kurven" in endlicher Zahl aus, d.h. algebraische Mannigfaltigkeiten, deren Dimension mindestens um 2 geringer ist, als $n/2\,(n+3)$.

Dies läßt sich durch folgende räumliche Ausdrucksweise noch lebendiger machen:

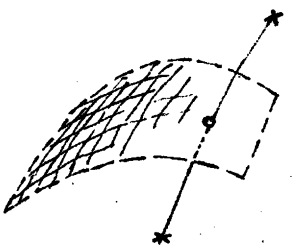


Diese algebraischen Kurven mit höheren Singularitäten ergeben auf den Wandungen $D=0$, welche die verschiedenen Kammern des höheren Raumes abtrennen, sozusagen nur Ornamente, Verzerrungen, welche aber die Wandungen nicht ausfüllen, sondern selbst im ungünstigsten Falle nur zwei Dimension $n/2(n+3)-2$ ansteigen.

Sie mögen sich folgendes konkrete Bild machen. Nehmen Sie den R_3 und als Wandungen die 6 Ebenen eines Würfels. Für diese wäre dann etwa $D=0$. den Kanten des Würfels aber würden die höheren Singularitäten entsprechen.

Dies ist die Idee, an die sich der folgende Satz anschließt, der für das Weitere fundamental ist.

Wir wollen uns mit einer singularitätenfreien Kurve beschäftigen und uns also einen repräsentierenden Raum einen Punkt außerhalb halb der Fläche $D=0$ geben. Durch kontinuierliche Abänderung der Koeffizienten in der algebraischen Kurve gelangen wir von da nach



einem andern Punkt, wobei wir, wenn wir einen gegebenen Endpunkt erreichen wollen, wohl gegebenenfalls eine endliche Zahl von Windungen, aber nicht die Ovalmente auf ihnen werden durchsetzen müssen. Anders ausgesprochen.

Man kann von jeder singularitätenfreien Kurve zu jeder andern singularitätenfreien Kurve in der Weise kontinuierlich übergehen (durch Zwischenschaltung anderer Kurven), dass man von singulären Vorkommnissen nichts Anderes zwischen durch antrifft, als eine endliche Anzahl von Malen eine Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt (mag dieser nun reelle oder imaginäre Äste haben).

Der somit aufgestellte Satz, bezw. die Auffassung, die ihm zugrunde liegt, ist der Kern unserer Betrachtung. Wir werden fragen: Ist diese Auffassung mit den Ideen der gegenwärtigen Vorlesung verträglich?

Wenn wir es nicht mit algebraischen Flächen, sondern mit beliebigen Flächen zu tun hätten, so wären die Schlüsse nicht statthaft, wie schon das Beispiel der Peano-Kurve zeigt, die ein Ebenenstück ganz ausfüllt. Wenn wir aber dem Kurvenbegriff noch weitere Bedingungen auferlegen, so haben wir schon in der Jordan-Kurve eine solche Kurve, die die Ebene in ein

Inneres und Äußeres trennt. Wir haben es nun gar mit algebraischen Kurven und Flächen zu tun, so daß wir, so gewiß eine genauere Überlegung hier wünschenswert ist, doch ohne weiteres folgendes behaupten können:

Die allgemeinen Zusammenhangsverhältnisse der mehrdimensionalen Räume, von denen wir sprechen, daß nämlich eine Fläche wie eine Windung wirkt, eine Kurve aber nicht, werden bei algebraischen Kurven und Flächen sicher zutreffen.

Es wäre aber noch die Frage, weshalb oben, als von der Zahl der Kammern gesprochen wurde, das Wort „endlich" gebraucht werden konnte. Zugegeben, daß die Wandungen den Raum in Kammern trennen, weshalb sollen diese in endlicher Zahl vorhanden sein? Dies ist ein weiterer Punkt, an dem man zweifeln könnte. Ich sage hier so: Wären unendlich viele Kammern vorhanden, so müßte es eine Häufungsstelle geben und dieses erweist sich mit den Eigenschaften der algebraischen Funktionen unverträglich. Ich kann dies hier im Einzelnen nicht durchführen, rekapituliere aber noch einmal das Gesagte:

Unsere erste Überlegung geht dahin, daß der Raum überhaupt in getrennte Kammern zerlegt wird. Die zweite Überlegung bezieht sich darauf, daß deren Anzahl

endlich ist.

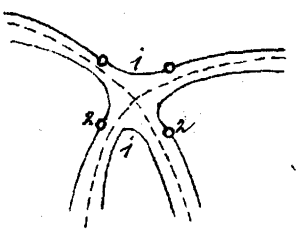
Nachdem wir so die allgemeinste geometrische Grundlage für die spätere Entwickelung haben, fragen wir:

Wie gestaltet sich im Reellen der Übergang, der darin besteht, daß sich eine algebraische Kurve ohne Doppelpunkt durch kontinuierliche Änderung der Koeffizienten in eine Kurve mit einem einfachen Doppelpunkt (der die Klasse nur um 2 Einheiten reduziert) verwandelt und dann wieder in eine Kurve ohne singulären Punkt?

Ich mache da zunächst die empirische Figur, orientiere mich an dieser und sehe dann zu, wie sich hier aus exakte Sätze für die algebraische Kurve gewinne.

Wir schließen uns hiermit an die früher bezeichnete, charakteristische Wendung des Gedankenganges von pag 366 an.

In der nebenstehenden Figur liegt folgendes vor:



Die Kurve mit Doppelpunkt entsteht, indem die beiden Äste der Kurve (ohne Doppelpunkt von oben nach unten kommend sich im Doppelpunkt verschmelzen, um hernach bei der Kurve 2, nach rechts und links wieder auseinanderzutreten.

Der allgemeine Habitus der Figur wird auch bei den algebraischen Ideal-Kurven bestehen bleiben. Unsere Frage richtet sich nur auf diejenigen Dinge, welche beim Grenzübergange nicht mehr in die Anschauung fallen, weil sie sozusagen mikroskopisch werden.

Dabei habe ich durch die Figur nur erst einen von 2 möglichen Fällen erläutert. Ein zweites Koordiniertes Vorkommen ist dies, dass ein Oval einer Kurve sich auf einen, isolierten" Doppelpunkt zusammenzieht und dann verschwindet (wie die nebenstehende Figur erläutert).

Jetzt fragen wir, immer noch im empirischen Gebiete, nach den Wendungen. Aus der ersten Figur lesen wir folgende merkwürdige Thatsache ab:

<u>Der Doppelpunkt absorbiert in dem Augenblick, wo er entsteht, zwei reelle Wendungen und gibt dieselben, wenn er verschwindet, wieder von sich. Oder etwas anders ausgesprochen:</u>

Die Kurven 1 und 2 haben beide in der Nähe des Doppelpunktes zwei Wendungen, die in der Grenze in den Doppelpunkt selbst hineinfallen.

Im 2ten Falle aber heißt es:

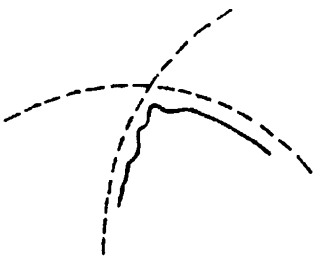
<u>Wenn andererseits ein Oval auf einen isolierten</u>

Doppelpunkt sich zusammenzieht und dann verschwindet, so sind (wenn die Sache so liegt, wie gezeichnet) reelle Windungen daran überhaupt nicht beteiligt.

Was läßt sich nun über die entsprechenden Dinge bei den algebraischen Idealkurven aussagen? Im Besonderen (um an den letzten Satz anzuknüpfen), wenn bei einer algebraischen Kurve ein isolierter Doppelpunkt durch kontinuierliche Abänderung eines Ovals hervorkommt, wird auch dann das Oval unmittelbar vorher im allgemeinen keine reelle Windungen haben und warum? Dabei heißt „im allgemeinen", daß wir das Eintreten höherer algebraischer Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten von $f = 0$ neben $D = 0$ ausschließen. Insbesondere soll also der Doppelpunkt die Klasse der Kurve nur um zwei Einheiten reduzieren. Übrigens aber denken wir hier an die Möglichkeit, daß bei der algebraischen Kurve sich in dem in Betracht kommenden Falle möglicherweise ein geschlängeltes Oval in den Doppelpunkt zusammenzieht.

Ebenso können wir für unseren ersten Fall sagen: Auch im Falle eines Doppelpunktes mit reellen Ästen

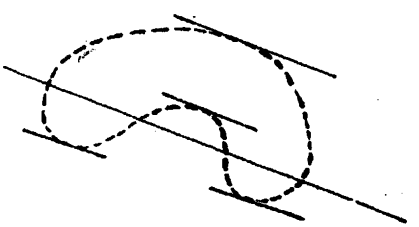
könnten bei einer algebraischen Kurve ausser den beiden Wendungen, die gemäss unserer Figur sicher vorhanden sind, möglicherweise noch weitere Wendungen in



den Doppelpunkt hineinreichen bezw. aus ihm hervorgehen (vergl. die obenstehende Figur). Die Frage ist, ob man behaupten kann, dass dies im allgemeinen nicht der Fall ist.

Den hier erforderlichen Beweis gebe ich am Beispiel des Ovals, weil er hier am bequemsten ist. Ich nehme das Oval mit 2 Wendungen und behaupte hierauf bezüglich:

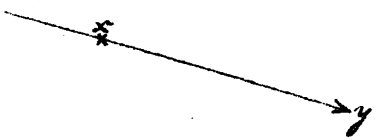
Wenn das Oval 2 Wendungen hat, dann gibt es einen Punkt y ausserhalb des Ovals, von dem aus 4 Tangenten an das Oval zu legen sind



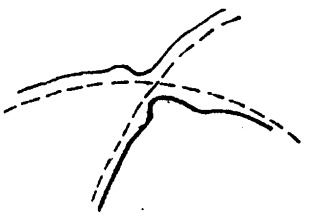
Zunächst kann man eine gerade Linie finden, die das Oval in 4 Punkten schneidet. Man braucht nur 2 Punkte des konkaven Kurvenzuges, der zwischen den beiden Wendepunkten liegt, durch eine Gerade zu verbinden (vergl. die Figur). Wählen wir diese Gerade als x-Axe und betrachten die Ordinaten senkrecht zur

Axe, so zeigt sich, daß jedes der 4 Stücke, in welche unser Oval durch die x – Axe zerlegt wird, mindestens ein Maximum oder Minimum der Ordinate hat, sodaß an unserer Oval 4 der x – Axe parallele Tangenten existieren. Der unendlich ferne Punkt der x – Axe ist also ein solcher Punkt, von dem aus mindestens 4 reelle Tangenten an das Oval gehen. Wir werden durch eine leichte Modifikation dieser Konstruktion ein ganzes Gebiet von Punkten y erhalten.

Und von hier aus kommen wir nun zu einem Widerspruch. Sieht sich nämlich unser Oval in einen isolierten Doppelpunkt zusammen, indem es bis zur Grenze hin seine Wendepunkte behält, so fallen für alle in Betracht gezogenen Punkte y offenbar alle 4 Tangenten in die Verbindungsgerade $x\,y$; unser Doppelpunkt absorbiert also für diese Punkte y 4 reelle Tangenten. Wir schließen, daß er für jeden Punkt y, algebraisch zu reden, 4 Tangenten absorbiert, während wir ausdrücklich voraussetzen, daß unser Doppelpunkt die Klasse nur um 2 Einheiten reduzieren solle. Also kann die Annahme eines Ovals, das bis zur Grenze hin 2 Wendungen oder noch mehr besitzt, nicht stattfinden.



Das ganz Entsprechende können wir für einen Doppelpunkt mit reellen Ästen machen:



Wenn bei den Nachbarkurven (wie ich die Kurven in der Nähe der Kurve mit Doppelpunkt nennen will) mehr als die beiden notwendigen Wendungen vorhanden wären, dann würde beim Übergang von den Nachbarkurven zur Kurve mit Doppelpunkt auch hier die Klasse um mehr als 2 Einheiten erniedrigt gegen unsere ausdrückliche Annahme, daß die Reduktion nur 2 Einheiten betragen soll. Somit haben wir folgenden bestimmten Satz bewiesen:

Wenn eine algebraische Kurve einen reellen Doppelpunkt bekommt, der die Klasse um 2 Einheiten erniedrigt, so unterscheide man, ob die Äste des Doppelpunktes reell oder imaginär sind. Im ersten Falle werden vom Doppelpunkte 2 reelle Wendungen, im zweiten Falle keine reellen Wendungen absorbiert.

Die Ableitung dieses Satzes ist im Sinne der gegenwärtigen Vorlesung gewissermaßen das Zentrum unserer auf die Wendepunkte der algebraischen Kurven bezüglichen Überlegungen, weil nämlich dabei der Vergleich zwischen dem, was anschaulich hervortritt, und dem, was begrifflich aus den Definitionen folgt, am klar-

sten herausgearbeitet ist.

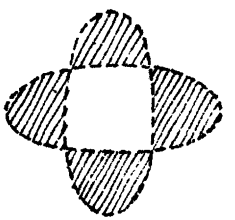
Ich gehe nun zu einem einfacheren Teile der Überlegung weiter, bei dem es unsere Aufgabe sein soll, Beispiele von algebraischen Kurven zu konstruieren, bei denen unsere zu beweisende Relation $n^2 + 2t' = n(n-2)$ tatsächlich erfüllt ist. Haben wir erst die Beispiele, so überzeugen wir uns davon, daß die Relation allgemein gilt, indem wir nachweisen, daß sie bei der allgemeinsten von uns zu betrachtenden kontinuierlichen Abänderung der Kurve ungeändert weiter bestehen bleibt.

Die in Rede stehende Konstruktion von Beispielen gelingt am einfachsten, wenn man sich erstens Kurven mit möglichst vielen Doppelpunkten konstruiert, die in niedere Bestandteile zerfallen, so daß man die Gesamtgestalt der Kurve ohne weiteres übersieht, und zweitens von den so erhaltenen Kurven zu singularitätenfreie Nachbarkurven übergeht, wo unsere Relation dann befriedigt sein wird.

Man hat hier zweckmäßigerweise zwischen geradem und ungeradem n zu unterscheiden.

Sei n zunächst gerade.

Wir wählen vorab $n = 4$, wo sich die Dinge, die ich Ihnen



vorführen möchte, noch bequem zeichnen lassen.

Wir zeichnen einfach 2 kongruente Ellipsen A_1 und A_2 mit demselben Mittelpunkt, unter einem Winkel von 90° gegeneinander gedreht, die sich in 4 reellen Punkten kreuzen. Dann ist $A_1, A_2 = 0$ unsere ausgeartete C_4. Diese hat, wie Sie sehen, 4 reelle Doppelpunkte, eben die Kreuzungspunkte der beiden Ellipsen, und kann auch algebraisch nicht mehr als diese 4 haben (nach dem Bézoutschen Theorem). Also alle Doppelpunkte der Kurve sind reell mit reellen Ästen.

Die Klasse unserer Kurve ist, da jede der Ellipsen von der 2ten Klasse ist, $k = 4$. Bei der allgemeinen C_4 gehen $4 \cdot 3 = 12$ Tangenten von einem Punkte y außerhalb an die Kurve. Es hat demnach eine Erniederung der Klasse um $12 - 4 = 8$ Einheiten stattgefunden, woraus folgt, daß jeder der 4 Doppelpunkte unserer C_4 die Klasse der C_4 um 2 Einheiten erniedrigt hat.

Weiter orientieren wir uns über die Doppeltangenten unserer C_4. Nach der allgemeinen Theorie müssen es $1/2\, n(n-2)(n^2-9)$, d. h. 28 sein. Diese 28 Doppeltangenten werden in der Figur vorgestellt durch die 4 gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen, dann aber weiter durch die 6 Verbindungsgeraden der 4 Doppelpunkte, von denen jede 4-fach zu zählen ist. (Letzteres schließt

man daraus, daß man die 6 Verbindungsgera-den zunächst mit der Multiplicität α einführt, so daß sie 6α Doppeltangenten repräsentieren, dann überlegt, daß ausser diesen Verbindungsgeraden nur noch die 4 gemeinsamen Tangenten der Ellipsen als Doppeltangenten auftreten, und nun $4 + 6\alpha = 28$ setzt. Übrigens werden wir sofort noch eine andere Bestätigung für diese Multiplicität 4 bekommen.)

Fügen wir noch hinzu, daß unsere besondere C_4 keine Wendepunkte hat, so kennen wir dieselbe für unsere Zwecke vollständig. Wir gehen jetzt zu einer Nachbarkurve, indem wir $A_1 A_2 = \pm \varepsilon$ setzen, wo ε eine kleine positive Grösse ist.

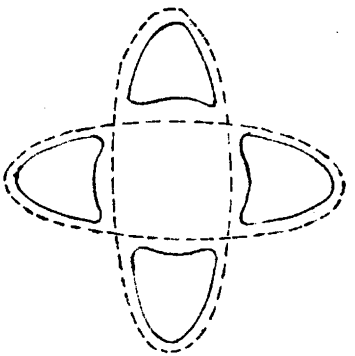
Um dies durchzuführen, schreiben wir etwa:

$$A_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad A_2 = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1.$$

Wir sehen dann: A_1 ist im Innern der Ellipse A_1 kleiner als Null, im Äussern > 0, ebenso für A_2, so daß $A_1 A_2$ in den schraffierten Teilen, die den beiden Ellipseninnern nicht gemeinsam sind, negativ wird (vergl. die Figur auf pg. 398).

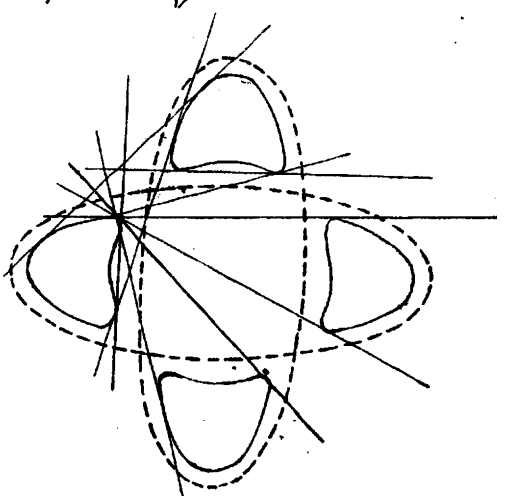
Wählen wir nun zunächst das andere Zeichen: $A_1 A_2 = -\varepsilon$, so müssen wir eine ganz im schraffierten Gebiete verlaufende, singularitätenfreie Nachbarkurve zeichnen. Das geschieht so, daß wir 4 Ovale in

diese Gebiete hineinlegen (vergl. die nebenstehende Figur).



Sie sehen, wir erhalten für unsere Nachbarkurve genau 3 reelle Wendungen ($\omega' = 3$), wie es sein muß, da jeder Doppelpunkt nach unserm allgemeinen Satz 2 Wendungen abgiebt und die Ellipsen von Hauseaus keine Wendungen besitzen.

Wie steht es aber mit den 28 Doppeltangenten der jetzt konstruierten Kurve?



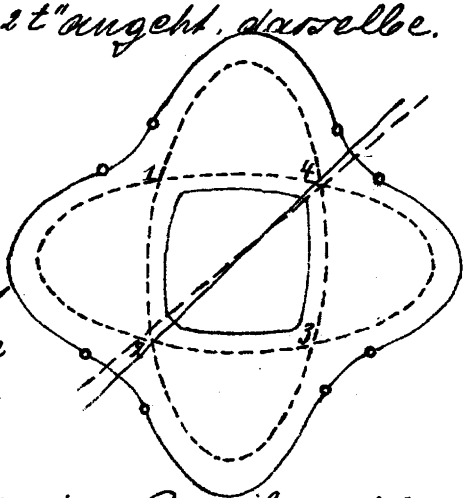
Diese lassen sich in vorliegenden Falle ziemlich bequem nachweisen. Zunächst geben die genannten 4 gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen ohne weiteres 4 gemeinsame Tangenten unserer Ovale, also 4 reelle Doppeltangenten, und im Übrigen schaltet sich jede der 6 Verbindungsgeraden von 2 Ellipsenmittelpunkten, wie die Figur zeigt, in 4 reelle Doppeltangenten, womit wir im Ganzen die 28 überhaupt vorhandenen erhalten. Isolierte Doppelten,

genten treten bei unserer Kurve nicht auf, da es ausser den 28 jetzt konstruierten (die sämtlich reelle Berührungspunkte haben) nach der allgemeinen Theorie keine Doppeltangenten mehr gibt. Somit ist $t'' = 0$ und wir erhalten in der Tat:

$$w' + 2t'' = 8 = 4 \cdot 2 = n(n-2).$$

Also für unser erstes Beispiel stimmt die Relation.

Etwas anders werden die Verhältnisse, wenn wir die zweite Nachbarkurve $A_1 A_2 = +\varepsilon$ wählen; das Resultat ist aber, so weit es die Summe $w' + 2t''$ angeht, dasselbe.



Die Kurve setzt sich aus 2 Zügen, einem äusseren mit 8 Wendungen und einem inneren ohne Wendungen zusammen (vergl. die Figur). Man nennt eine solche Kurve, wo der eine Zug den anderen vollkommen umschliesst, eine Gürtelkurve.

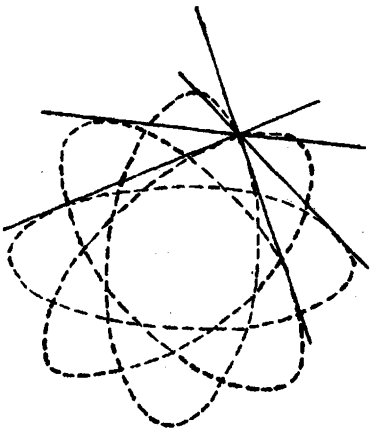
Immerhin hat auch hier wieder jeder Doppelpunkt 2 reelle Wendungen entstehen lassen. Ferner sind auch hier die 4 gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen in eigentliche Doppeltangenten übergegangen. Was aber die 24 übrigen Doppeltangenten angeht, die der allgemeinen Theorie zufolge bei der Kurve vorhanden

sein sollen, so sind diese notwendig imaginär. Zie-
hen wir z.B. die Verbindungsgerade $\overline{24}$ der beiden Schnitt-
punkte 2 und 4 unserer ursprünglichen Ellipsen (o-
der Figur (aus der doch 4 Doppeltangenten hervorge-
hen sollen), so sehen wir, daß $\overline{24}$, auch wenn wir es ein we-
nig gegen seine ursprüngliche Lage variieren, stets 4
ganz auseinander liegende reelle Schnittpunkte mit
der Kurve hat, die nicht zu je 2 zusammenfallen. Sol-
len aber „in der Nähe" von $\overline{24}$ Doppeltangenten vorhan-
den sein, so können diese nur imaginär sein. Somit
haben wir den Schluß:

Unsere Zirkelkurve hat 4 reelle Doppeltangenten mit
je 2 reellen Berührungspunkten und außerdem $\overline{24}$
imaginäre Doppeltangenten, aber nicht etwa isolierte
Doppeltangenten.

In unserer Schreibweise ist also $t''=0$ und wieder
ist die Relation $\omega' + 2t'' = 8$ befriedigt.

Damit ist der Fall $n=4$ vorläufig erledigt d.h. wir
haben bei $n=4$ Beispiele von Kurvenkonstruiert, bei
denen unsere Relation stimmt. Um für höhere Wer-
te von n von geradem Charakter dasselbe zu beiten,
konstruieren wir uns zunächst $n/2$ kongruente Ellip-
sen mit demselben Mittelpunkt, die gegeneinander
unter einem Winkel $2\pi/n$ geneigt sind. Z.B. nehmen



wir 4 Ellipsen wie in der neben-stehenden Figur, so erhalten wir eine C_8. Hier machen wir nun bei der so erhaltenen C_n dieselbe Abzählung wie vorhin bei der C_4.

1/ Wieviel Doppelpunkte sind vorhanden?

Jede der Ellipsen schneidet die übrigen in 4 reellen Punkten, wir haben also im ganzen

$4 \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)$ Doppelpunkte d. h.

$\frac{n}{2}(n-2)$

Unsere Kurve hat reelle Doppelpunkte, die selben berühren sämtlich reelle Äste.

2/ Zweitens berechnen wir die Klasse der Kurve. k ist offenbar n, denn an jede Ellipse gehen 2 Tangenten und es gibt $\frac{n}{2}$ Ellipsen. Gehen wir auf die allgemeine Formel zurück, so ist

$k = n(n-1) -$ (Reduktion, die aus den Doppelpunkten herrührt). Letzteres berechnet sich also zu

$R = n(n-2)$ d. h.

Die Klasse unserer Kurve ist gegenüber der Klasse der singularitätenfreien Kurve um $n(n-2)$ Einheiten reduziert, sodass nieder auf jeden Doppelpunkt eine Reduktion von 2 Einheiten fällt.

3/ Drittens weisen wir die $(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten der Kurve nach. Wir haben

a/ bei je 2 Ellipsen 4 gemeinsame Tangenten, die als Doppeltangenten der Gesamtkurve anzusehen sind. Dies gibt im Ganzen

$$\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right) \times 4 = \frac{n}{2}(n-2) \text{ Doppeltangenten,}$$

b/ aus jeder Verbindungsgeraden zweier Schnittpunkte zweier Ellipsen 4 Doppeltangenten. Dies gibt:

$$4 \cdot \frac{n}{2}(n-2) \cdot \left\{\frac{n}{2}(n-2)-1\right\} \text{ Doppeltangenten,}$$

c/ endlich kommt noch eine 3te Kategorie Doppeltangenten dadurch hervor, daß von jedem Schnittpunkte zweier Ellipsen an die anderen Ellipsen, die sich nicht in dem Punkte kreuzen, 2 Tangenten möglich sind. Diese Tangenten zählen als Doppeltangenten der Gesamtkurve doppelt (wie wieder auf verschiedene Weisen herausgebracht werden kann). Wir haben $\frac{n}{2}(n-2)$ Schnittpunkte von 2 Ellipsen und von jedem derselben $\frac{n-4}{2}$. 2 Tangenten der genannten Art (die sämtlich reell sind). Dies gibt also

$$\frac{n}{2}(n-2)\left(\frac{n}{2}-2\right) \cdot 2 \cdot 2 \text{ Doppeltangenten der Gesamtkurve.}$$

Durch Addition der gefundenen 3 Arten Doppeltangenten kommt als Gesamtzahl der Doppeltangenten:

$$\frac{n}{2}(n-2)\left\{1+n^2-2n+2n-2-8\right\} = \frac{n}{2}(n-2)(n^2-9).$$

Wir haben damit die sämtlichen $\frac{n}{2}(n-2)(n^2-9)$ Doppeltan-

genten der allgemeinen Kurve an unserer speziellen Kurve nachgewiesen. Diese Doppeltangenten sind zum Teil zu 4, zum Teil zu 2 zusammengerückt, aber dabei alle reell mit reellen Berührungspunkten.

4/ Wendepunkte sind bei unserer ausgearteten Kurve natürlich nicht vorhanden.

Von dieser ausgearteten Kurve n^{te} Ordnung, die aus $n/2$ übereinandergelagerten Ellipsen $A_1 = 0, \ldots A_{n/2} = 0$ besteht, also die Gleichung

$$A_1 A_2 \ldots A_{n/2} = 0$$

hat, gehen wir jetzt zu einer Fastbarkurve

$$A_1 A_2 \ldots A_{n/2} = \varepsilon$$ über

Die $n/2\,(n-2)$ Doppelpunkte der ausgearteten Kurve geben hier $n(n-2)$ reelle Wendungen.

Die Doppeltangenten aber können zum Teil reell und imaginär werden; es hängt dies von der Art des Grenzüberganges zur Fastbarkurve ab, d. h. davon ab, ob wir das untere oder obere Zeichen von ε wählen. Ganz gewiss aber entstehen keine isolierten Doppeltangenten, da die Berührungspunkte der Doppeltangenten (soweit eben die Doppeltangenten reell ausfallen) durch die Gestalt der Ausgangsfigur als reell vorgezeichnet sind.

Damit sind wir am Ziele; wir haben

$$w' = n(n-2), \quad t = 0 \text{ und also.}$$

$w' + 2t'' = n(n-2)$ u.s.w.

Dies Beispiel für ein beliebiges gerades n war eine Verallgemeinerung der Überlegung bei $n = 4$, nur daß bei der Aufzählung der Doppeltangenten eine neue Kategorie c auftrat.

Ich verlasse nunmehr diesen Fall und betrachte ungerades n, indem ich auch hier mit dem niedrigsten Falle, bei dem die allgemeine Überlegung hervortritt, nämlich $n = 5$, beginne.

Wir arrangieren die Überlegung der vorigen ähnlich, indem wir zuerst eine ausgeartete C_5 konstruieren, bei der wir die Verhältnisse klar übersehen, und von hier aus zu einer allgemeinen C_5 aufsteigen. Die Relation, welche sich dabei ergeben soll, lautet

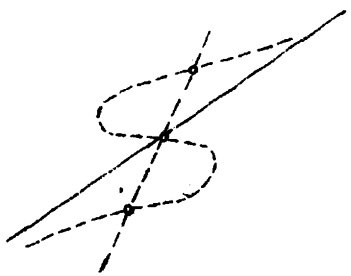
$$w' + 2t'' = 15.$$

Wir setzen unsere spezielle C_5 aus einer C_3 $(g = 0)$ und einer Ellipse $\Lambda = 0$ zusammen, sodaß ihre Gleichung

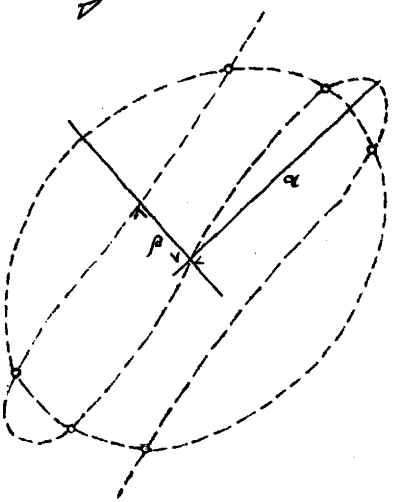
$$g \cdot \Lambda = 0$$

wird. Die Frage ist nun wir die C_3 und C_2 wählen wollen, damit wir für unsere Zwecke gute Verhältnisse bekommen.

Ich hob bereits hervor, daß bei einer C_3 stets ein unpaarer Zweig auftritt, den wir hier insbesondere so zeichnen wollen,



daß nur eine Asymptote vorhanden ist. Man kann dem Kurvenzug nun eine zur Asymptote symmetrische Gestalt geben, so daß ein Wendepunkt in den Schnitt O der Asymptote mit der Kurve fällt, die beiden anderen liegen dann auf einer Geraden durch O gleichweit nach entgegengesetzten Seiten.



Durch Auseinanderziehen d. h. durch eine geeignete affine Transformation erreicht man es, daß die Kurve eine für unsere Zwecke besonders geeignete Gestalt erhält, wie sie in nebenstehender Figur vorliegt. (Es kommt für uns hier nicht darauf an, die sämtlichen Gestalten der C_3 zu übersehen, sondern nur eine für unseren Zweck besonders bequeme C_3 hervorzuheben).

Nennen wir den kleinsten Abstand des Punktes O von den Flanken der Kurvenstreifen β, den größten von den Scheiteln der Schleifen α (vergl. die Figur) und wählen zwei Größen a und b so, daß

$$a < \alpha \quad b > \beta \quad \text{aber} \quad a > b,$$

so erhalten wir, wenn wir a und b als Halbaxen einer um O als Mittelpunkt herumgelegten Ellipse wählen, alle b nach dem Bézoutschen Theoreme möglichen

Schnittpunkte unserer C_3 mit der Ellipse als reelle Punkte. Dies wird gelten, wie wir auch die Ellipse um O drehen d.h. welches Azimut wir für die Hauptaxen vor aussetzen wollen. Andererseits schneiden sich 2 solche Ellipsen dann selber noch in 4 reellen Punkten, wo durch die Möglichkeit geboten ist, auch höhere Kurven C_7, C_9, ... in zweckmässiger Weise zu konstruieren (was ich weiterhin nicht mehr besonders ausführe).

Bleiben wir hier bei unserer Kurve C_5, wo ich die Dinge völlig konkret berechnen kann.

Zunächst die Klasse.

Die Klasse der C_0 ist offenbar = $3 \times 2 = 6$

" " " C_2 " " = $2 \times 1 = 2$, daher

" " unserer Kurve = $6 + 2 = 8$. Da nun nach der allgemeinen Theorie $k_5 = n(n-1) = 5 \times 4 = 20$ ist, so haben wir eine Reduktion um 12 Einheiten, sodass auf jeden Doppelpunkt wieder eine Reduktion von 2 Einheiten kommt.

Die Zahl der reellen Wendepunkte ist 3, da die C_0 3, die Ellipse aber keine Wendepunkte besitzt.

Weiter gilt es jetzt an unserer Kurve die

$\frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) = 120$ Doppeltangenten

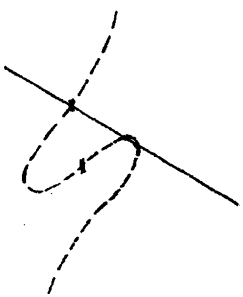
des allgemeinen Falls nachzuweisen.

Da sind zunächst die gemeinsamen Tangenten von

C_3 und C_2. Hier gibt, da C_3 von der 6ten Klasse, C_2 von der 2ten Klasse ist, 12 Doppeltangenten der C_5. Sind sie reell oder imaginär? Jedenfalls sind sie nicht alle reell, wie ein Blick auf die Figur (pg. 408) zeigt. Ohne hier näher zu entwickeln, können wir behaupten: Diejenigen unserer 12 gemeinsamen Tangenten von C_3 und C_2, die reell sind, haben auch reelle Berührungspunkte, nicht etwa konjugiert imaginäre, sodaß keine sog. isolierten Doppeltangenten auftreten.

Es kommt dies dadurch heraus, daß die Berührungspunkte einer solchen gemeinsamen Tangente, die doch auf der C_3 und C_2 verteilt liegen sollen, getrennten algebraischen Bedingungen genügen.

Weiter lassen sich von den Doppelpunkten unserer Kurve allerdings nicht an die Ellipse, wohl aber an die C_3 noch Tangenten legen, die die Kurve in einem anderen Punkte als in dem betreffenden Doppelpunkt berühren, es sind dies je 4 Tangenten; die Zahl 4 kommt so heraus, daß von einem beliebigen Punkt, der nicht auf der C_3 liegt, 6 Tangenten an die selbe gehen, wenn der Punkt aber auf die C_3 rückt, offenbar 2 Tangenten von diesen 6 in seine eigene



Tangente zusammenfallen, sodass noch $6 - 2 = 4$ bleiben. Es gibt im ganzen 4×6 Tangenten (von jedem der 6 Doppelpunkte 4 Tangenten). Bei der Auflösung der Doppelpunkte erhält man von hieraus, da jede unserer Tangenten (wie im Falle der geraden n) 2 Doppeltangenten der allgemeinen C_6 ergiebt, $4 \times 6 \times 2 = 48$ Doppeltangenten. Ob diese im Einzelnen reell oder imaginär sind, das wissen wir wieder nicht und lassen es munterrudd. Über eins wissen wir wieder:

Diese 48 Doppeltangenten, die wir bei der Fahlbarkurve $\varphi R = \pm E$, so weit sie reell ausfallen, getrennt vor Augen sehen werden, sind sicher keine isolierten Doppeltangenten. Denn sie müssen den einen Berührungspunkt in der Nähe der entsprechenden Doppelpunktes, den andern entfernt davon haben, weil er bei der ausgearteten Kurve so ist.

Als letzte Kategorie von Doppeltangenten kommen die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte untereinander. Es gibt $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Verbindungsgeraden. Jede ist aber als Doppeltangente mit der Multiplizität 4 zu zählen (wie im Falle eines geraden n), sodass wir den Satz haben:

Die 15 Verbindungsgeraden der 6 Doppelpunkte ergeben für die Fahlbarkurve $15 \times 4 = 60$ Doppeltangenten.

Wir fahren gleich fort:

Soweit die so entstehenden Doppeltangenten überhaupt reell sind, sind sie wieder nicht isoliert, da die Berührungspunkte allemal doch in der Nähe der beiden Doppelpunkte, die wir ursprünglich geradlinig verbanden, zu suchen sind.

Mit dieser Aufzählung der Doppeltangenten (12+48+60) sind sämtliche 120 Doppeltangenten der allgemeinen Theorie bei unserer Kurve nachgewiesen.

Nun haben wir alles beisammen, um zu der Nachbarkurve $\varphi\Omega = \pm\varepsilon$ überzugehen.

An reellen Wendungen haben wir offenbar die 3 Wendungen der C_3 und je 2 aus den 6 Doppelpunkten d.h. $3+2\times 6 = 15$.

Soweit reelle Doppeltangenten vorhanden sind, sind sie nicht isoliert, also $t'' = 0$.

Also haben wir auch hier richtig: $\omega' + 2t'' = 15 = 5.3 = n(n-2)$.

Ähnlich ist es bei beliebigen ungeraden n; ich unterlasse die Ausführung (bei der wir von einer ausgearteten C_n ausgehen, die aus einer C_3 und $\frac{n-3}{2}$ einander unter gleichen Azimuten kreuzenden reellen Ellipsen besteht).

Jedenfalls bekommen wir auch bei beliebigem unge-

raden n Beispiele singularitätenfreier Kurven, bei denen $w' + 2t'' = n(n-2)$ ist.

Nachdem wir uns diese Beispiele konstruiert haben, treten wir wieder in die allgemeine Überlegung der zu führenden Beweise ein:

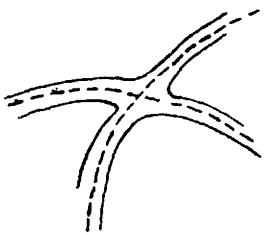
Wir wissen, dass wenn wir von dem repräsentierenden Punkt einer singularitätenfreien C_n zu dem repräsentierenden Punkt einer zweiten singularitätenfreien C_n übergehen wollen, wir das stets so einrichten können, dass wir die Mannigfaltigkeit $\delta = 0$ nur an solchen einzelnen Stellen durchsetzen, denen solche C_n entsprechen, die keine andere Singularitäten besitzen als einen einzelnen Doppelpunkt, der die Klasse um 2 Einheiten reduziert. Nun möchten wir wissen, was aus der für 1 bestehenden Relation $w' + 2t'' = n(n-2)$ bei der Wanderung nach 2 hin wird. Überlegen wir uns, was überhaupt verloren resp. gewonnen werden kann.

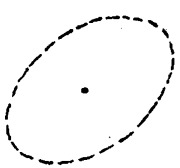
Man kann zunächst meinen, dass ein Verlust resp. Gewinn an Wendungen w' oder Doppeltangenten t'' eintritt, wenn man durch eine Kurve mit gewöhnlichem Doppelpunkt hindurchgeht. Dies ist aber nicht der Fall, vielmehr gilt der Satz.

Die Anzahl $w' + 2t''$ bleibt, wenn wir in verabre-

deter Weise die Mannigfaltigkeit $D = 0$ durchsetzen, ungeändert.

Wir müssen dabei natürlich in Betracht ziehen, daß der bei der C_n auftretende gewöhnliche Doppelpunkt ein Doppelpunkt mit reellen Ästen oder ein isolierter Doppelpunkt sein kann.





Im ersteren Falle gehen offenbar 2 reelle Wendungen der Kurve beim Übergang zur Kurve mit Doppelpunkt verloren, treten aber alsbald wieder hervor, sobald wir den Doppelpunkt auflösen, sodaß also ω ungeändert bleibt.

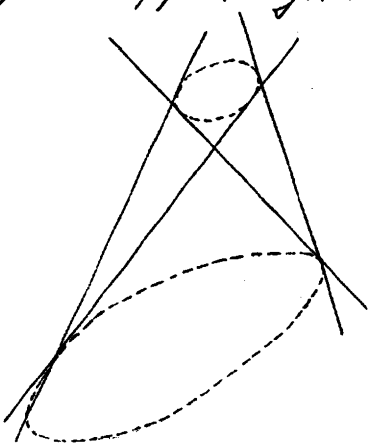
Im 2t Falle sind überhaupt keine reellen Wendungen beim Grenzübergange beteiligt, sodaß von einer Änderung des ω' von vornherein keine Rede sein kann.

Damit ist der erste Schritt erledigt:

Beim Überschreiten einer Kurve mit Doppelpunkt, der die Klasse um 2 Einheiten reduziert, erleidet die Zahl ω' der Wendungen der singularitätenfreien Kurve keine Änderung.

Genau so erleidet aber auch t'' keine Änderung. Wohl ändert sich allgemein zu reden die Zahl der reellen Dop-

peltangenten, aber die hiervon betroffenen Doppeltangenten sind keine isolierten. Man überlege sich dies etwa an nebenstehender Figur, wo 4 Doppeltangenten beim Übergang des einen Ovals in einen isolierten Punkt und nachherigem Verschwinden dieses Punktes imaginär werden, aber keine Rede davon ist, daß sie etwa reelle isolierte Doppeltangenten gewesen wären oder würden.



Genau so ist es bei den reellen Doppeltangenten, die ein Doppelpunkt mit reellen Ästen gegebenenfalls abworbiert. Also:

Das Passieren der Kurve mit Doppelpunkt kann in der Zahl der reellen Doppeltangenten der Kurve eine grosse Änderung hervorrufen, aber die Zahl der reellen isolierten Doppeltangenten wird davon nicht berührt.

Nehmen wir zusammen, was wir über w und t" sagten, so sehen wir, daß bei dem in Rede stehenden Übergang in der Tat die Summe $w' + 2t$" vorher und nachher dieselbe bleibt.

Hiermit haben wir das Hindurchgehen durch die Fläche $D = 0$ erledigt. Natürlich kann die Sache, wenn

wir an Stellen, wo höhere Singularitäten vorliegen, die Fläche durchsetzen, weit komplizierter werden. Das Schöne aber ist eben, daß wir die Betrachtung dieser höheren Fälle vollständig vermeiden können. Würde einer sich die Mühe machen, den Einfluß eines Passierens von höheren Singularitäten der Fläche $D = 0$ genau zu diskutieren, so ist kein Zweifel, daß er schließlich als Endresultat ebenfalls finden würde, daß die Summe $\alpha + 2t''$ nach Überschreitung der Singularität ungeändert geblieben ist. Denn man kann vom Anfangspunkte zum Endpunkte des Weges immer hinkommen, indem man um die höheren Singularitäten von $D = 0$ herumgeht.

Wenn also die Summe $\alpha' + 2t''$ beim Durchgang durch die Fläche $D = 0$ dieselbe bleibt, wie kann sie sich dann überhaupt ändern? Die Vorkommnisse, bei denen dies möglicherweise eintritt, werden von uns nur unter der Bedingung $D = 0$ zu betrachten sein. Wäre nämlich zugleich $D = 0$, so hätten wir ein „höheres Vorkommnis" vor uns, das wir nach unserer allgemeinen Überlegung immer vermeiden können. Wir haben also folgende präzise Fragestellung vor uns:

Wie kann sich auf dem Wege von einem repräsentierenden Punkt zu einem andern die Zahl $\alpha' + 2t''$ möglicherweise ändern, wenn wir bereichlicherweise nur $D \neq 0$

die Vorkommnisse in Betracht ziehen, die sich durch eine einzelne algebraische Gleichung in den Koeffizienten der C_n ausdrücken und wenn wir insbesondere den Fall $D=0$, weil schon erledigt, bei Seite lassen?

Offenbar kann sich die Zahl r' nur noch dadurch ändern, dass auf der singularitätenfreien Kurve 2 reelle Ketten zusammenrücken und imaginär werden oder umgekehrt.

Andererseits kann sich t'' dadurch ändern, dass entweder 2 isolierte Doppeltangenten zusammenrücken und imaginär werden, oder dass eine isolierte reelle Doppeltangente sich in eine nicht isolierte Doppeltangente verwandelt oder umgekehrt.

Die erste der beiden hiermit genannten Möglichkeiten für die Änderung der Zahl t'' brauchen wir nicht einmal zu berücksichtigen, weil in der Forderung 2 Bedingungen enthalten sind. Fallen nämlich 2 isolierte Doppeltangenten zusammen, so haben wir entweder eine 4-fache Tangente oder eine Tangente, welche an 2 Stellen oskuliert (weil doch die beiden konjugiert imaginären Berührungspunkte immer das gleiche Schicksal erleiden müssen).

Die einzige Änderung von t'', die in Betracht kommt, besteht also darin, dass aus einer isolierten Doppeltan-

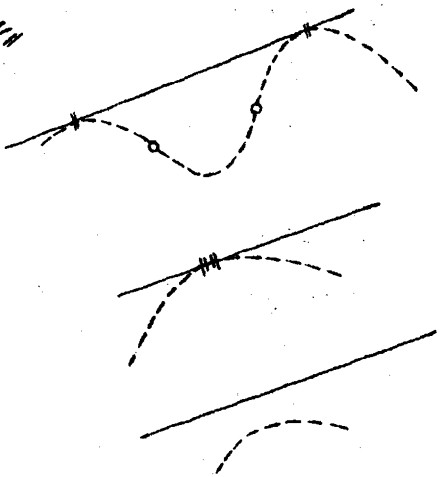
gente eine nicht-isolierte Doppeltangente hervorkommt oder umgekehrt.

Und nun stellt sich die Sache erfreulicherweise so, daß die beiden Änderungen von x' und t, die allein noch zu überlegen sind, notwendig in der Art gleichzeitig eintreten, daß $x' + 2t$ dabei ungeändert bleibt.

Den hiermit aufgestellten Satz erläutern wir zunächst graphisch an gezeichneten Kurven und fragen dann:

Läßt sich das, was wir hier sehen, in exakte Sätze über algebraische Idealkurven verwandeln?

Wir zeichnen einen Kurvenzug wie nebenstehend mit 2 reellen Wendungen, lassen diese dann zusammenrücken und schließlich imaginär werden. In der Figur 1 haben wir offenbar eine Doppeltangente mit 2 reellen Berührungspunkten, hieraus wird in Figur 2 eine sog. 4-punktige Tangente und in Figur 3, algebraisch zu reden, eine isolierte Doppeltangente, da doch eine reelle Doppeltangente nur so imaginär werden kann, daß sie zunächst mit einer anderen zusammenfällt, wovon aber im vorliegenden Fal-



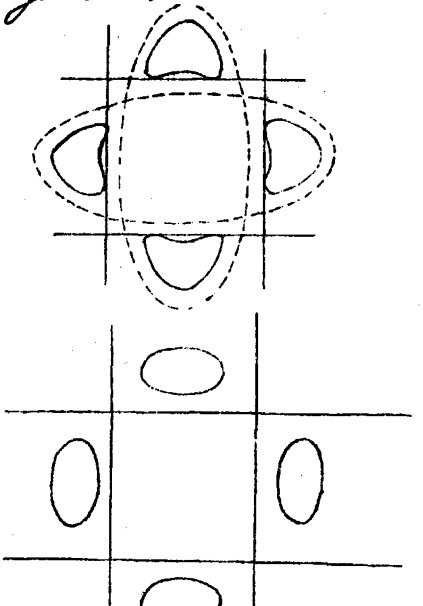
le gar nicht die Rede ist). Also:

Indem die beiden Wendepunkte zusammenfallen und imaginär werden, rücken auch die Berührungspunkte der Doppeltangenten zusammen und werden imaginär. Die Doppeltangente selbst bleibt bei diesem Übergange reell.

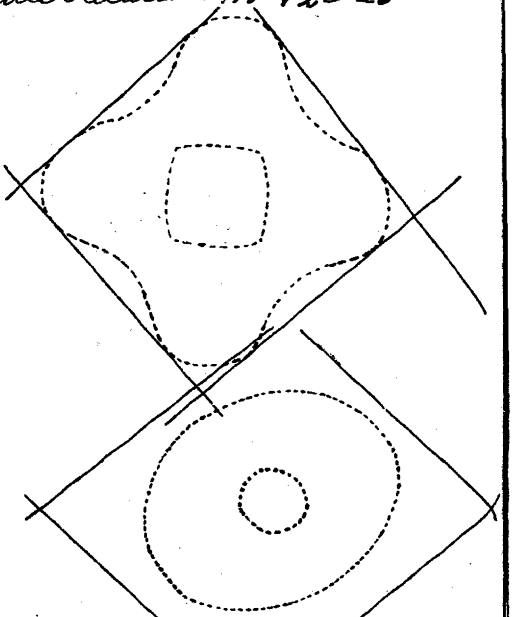
Wenn also w' um 2 Einheiten sinkt, wächst t'' um eine, wodurch, da t'' in der Summe w' + 2t'' mit 2 multipliziert auftritt, die Relation richtig bleibt. –

Darf ich dies zunächst noch an den beiden Gestalten der C_4 erläutern, die wir uns früher hergestellt hatten.

Wir gingen von 2 sich kreuzenden Ellipsen aus und konstruierten uns einmal die Kurve $l_1 l_2 = -\varepsilon$, die aus 4 getrennten Ovalen besteht. Ich richte jetzt die Aufmerksamkeit darauf, daß von diesen 4 Ovalen jedes für sich genommen eine Doppeltangente besitzt (vergl. die Figur). Lassen wir nun ε größer werden, so können diese Doppeltangenten abgestoßen werden; wir erhalten dann ein Bild, wie es die obenstehende Figur zeigt. Hier sind keine reellen Wendungen mehr vorhanden, dafür aber 4 reelle



isolierte Doppeltangenten, sodaß die Relation $n' + 2t'' = 8$ richtig bleibt.



Das andere Mal setzen wir $\lambda_1, \lambda_2 = +\varepsilon$ und erhielten die Grenzkurve (auch zunächst mit 8 reellen Wendungen). Der äußere Kurvenzug als solcher besitzt hier 4 Doppeltangenten; wächst ε, so kommt ein Augenblick, wo diese 4 Doppeltangenten in 4 4-punktige Tangenten und darüber hinaus in 4 reelle, isolierte Doppeltangenten übergehen, die den Kurvenzug, der jetzt ovalartige Gestalt hat, umgeben, ohne ihn zu treffen. Aber gleichzeitig sind die 8 Wendungen des Kurvenzuges verschwunden. Auch hier bleibt also die Relation $n' + 2t'' = 8$ bestehen.

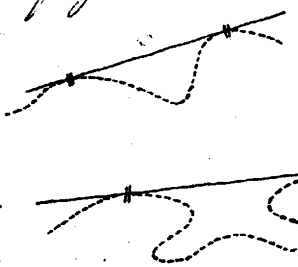
So kommt es bei den C_4 thatsächlich heraus. Die Frage ist: Weshalb ist das so, und nicht nur im speziellen Falle bei $n = 4$, sondern immer und bei beliebigem n?

Hierauf sage ich, getreu dem Prinzip dieser Vorlesung: Zunächst sind die Figuren, die wir bei beliebigem n erhalten, denjenigen, die wir jetzt im Beispiele betrach

teten, ganz ähnlich. Es kommt aber darauf an, zu prüfen, wie so man aus diesen Figuren exakte Schlüsse für die algebraischen Idealkurven ableiten kann.

Ich skizziere dies folgendermaßen:

Es wird sich zunächst darum handeln, gewisse empirische Figuren zu betrachten (vergl. auch die Figur von pg. 418). Irgend ein Kurvenzug, der sich nicht durch's Unendliche erstreckt, möge eine Doppeltangente haben, deren Berührungspunkte also nach Durchlaufung eines endlichen Kurvenstücks aufeinanderfolgen. Ein Blick auf die Figuren zeigt, daß zwischen den Berührungspunkten mindestens zwei Wendepunkte liegen (die Zahl derselben kann in der Tat = 2 sein). – Umgekehrt: wenn wir einen Kurvenzug, der ursprünglich keine Krümmungen besaß, durch Einschiebung seiner Teile mit zwei oder mehr Krümmungen versehen, so wird er mindestens eine Doppeltangente bekommen.



Zweitens wird man diese Sätze auf reguläre Ideal-Kurven übertragen, wobei der entscheidende Beweisgrund jedesmal in der richtigen Verwendung des Rolle'schen Theorems (oder des Weierstraß'schen Existenzsatzes betr. das Maximum einer stetigen Funktion) liegt. Hat

der Kurvenzug eine Doppeltangente, wie vorhin, so wähle man die x-Axe parallel zur Doppeltangente und den, die sich das Kurvenstück zwischen den Berührungspunkten durch einen geeigneten Parameter t in der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ dargestellt. In den Berührungspunkten ist dann $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{\varphi'}$ gleich Null. Aber y muss im Intervall ein Maximum oder Minimum haben. Dort ist dann abermals $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{\varphi'}$ gleich Null. Hier schliesse, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ im Intervall mindestens zweimal verschwindet, und dies war zu beweisen. Entsprechend beweist man den umgekehrten Satz.

Drittens wird man sagen, dass bei algebraischen Kurven, wenn man sich auf „allgemeine" Vorkommnisse über Art beschränkt, zwischen den Berührungspunkten einer Doppeltangente, die sich durch allmähliche Änderung der Gestalt des Kurvenbogens von diesem abschnüren soll, auch nur zwei Wendungen liegen. Fänden sich dort nähmlich mehrere Wendepunkte, und man liesse nun den Kurvenzug sich so deformiren, dass die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente zusammenrücken, so wäre dies ein Vorkommnis höherer Art, das wir bei unsern allgemeinen Betrachtungen bei Seite lassen dürfen.

Die 3 so bezeichneten Punkte ergeben nun zusammen

genommen, dass $w' + 2t''$ bei der algebraischen Ideal-kurve für die von uns zu betrachtenden Änderungen derselben konstant ist und damit, dass es für die singularitätenfreien Kurven C_n überhaupt den konstanten Wert $n(n-2)$ hat, w. z. b. w. —

Der hiermit zuende geführte Beweis unseres Theorems unterscheidet sich von dem in Math. Ann. 10 gegebenen nur dadurch, dass ich damals mehr unmittelbar auf die empirischen Figuren Bezug nahm, jetzt aber auf die Übertragung der Schlüsse von den Figuren auf die algebraischen Idealkurven ausführlicher einging. *)

*) Ich verweise übrigens auf den interessanten Vortrag von E. Zull auf der Naturforscher-Versammlung in Stuttgart 1906. [Zusatz vom Jan. 1907].

In einem Anhange handele ich

II. Von der Verwirklichung idealer Gebilde durch Zeichnungen und Modelle.

Hauptgegenstand der Entwickelungen dieser Vorlesung war die Unterscheidung der beschränkten Gegenwärtigkeit der empirischen Raumanschauung von den idealisierten Auffassungen der Präzisionsgeometrie. Sobald man sich dieses Unterschiedes bewußt wird, kann man seinen Weg einseitig nach der einen oder anderen Seite wählen. Die eine Möglichkeit würde sein, daß wir um der Verzicht auf schärfere Begriffsbestimmungen eine Geometrie nur auf den Tatsachen der empirischen Raumanschauung aufzubauen unternehmen (wo man dann nie von Punkten oder Linien sprechen soll, sondern immer nur von Flecken [„Körnern" nach dem Vorschlage von Herrn Köpcke] und Streifen). Die andere Möglichkeit ist, daß wir die Raumanschauung als trügerisch überhaupt bei Seite lassen und nur mit abstrakten Beziehungen der reinen Analysis operieren. Beide Möglichkeiten scheinen gleich unfruchtbar

zu sein; jedenfalls bin ich immer dafür eingetreten, daß wir die beiderlei Gebiete, nachdem man sich über ihre Verschiedenheit klar geworden, in Verbindung halten soll.

In dieser Verbindung scheint eine wunderbare anregende Kraft zu liegen. Deshalb bin ich immer dafür eingetreten, daß man sich abstrakte Beziehungen auch durch empirische Modelle klar machen solle; dies ist der Gedanke, dem insbesondere unsere Modellsammlung ihren Ursprung verdankt. Ich möchte die letzten Stunden dieser Vorlesung benutzen, um Ihnen noch eine Reihe interessanter Modelle mit zugehörigen Erläuterungen vorzuführen.

Ich beginne gleich mit der Raumgeometrie und hier mit den Raumkurven.

In der Präzisionsgeometrie werden die Raumkurven als reguläre Idealkurven durch 3 Gleichungen:

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ definiert, wo t sein Intervall durchläuft. φ, ψ, χ sind stetige Funktionen, zweimal differentierbar und die 2ten Differentialquotienten noch abteilungsweise monoton.

Bei solchen Kurven spricht man nun von einer „Tangente" und „Oskulationsebene."

Man lernt, daß die Gleichung der Tangente gegeben ist als

$$\left\| \begin{matrix} (x-\varphi) & (y-\psi) & z-\chi \\ \varphi' & \psi' & \chi' \end{matrix} \right\| = 0.$$

das Nullsetzen dieser „Matrix" bedeutet natürlich nicht anderes als das Gleichungssystem:

$$\frac{x-\varphi}{\varphi'} = \frac{y-\psi}{\psi'} \quad \frac{z-\chi}{\chi'}.$$

Die Gleichung der Oskulationsebene lautet:

$$\left| \begin{matrix} x-\varphi & y-\psi & z-\chi \\ \varphi' & \psi' & \chi' \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' \end{matrix} \right| = 0.$$

Hierzu hat man dann die Sätze:

Wenn man 2 Punkte einer Raumkurve durch eine Sekante verbindet und läßt die Punkte zusammenrücken, so geht die Sekante in die Tangente über.

Wenn man durch 3 Punkte einer Raumkurve eine Ebene legt und läßt diese Punkte irgendwie zusammenrücken, so geht die Ebene in die Oskulationsebene über.

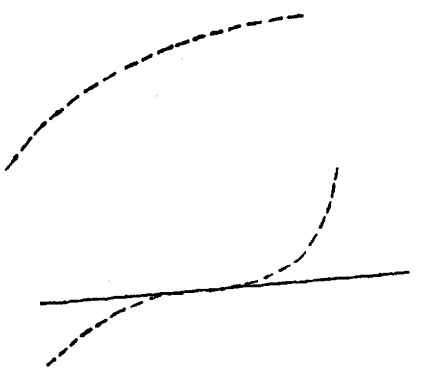
Die Frage wird nun sein, welche gestaltlichen Verhältnisse diesen Sätzen entsprechend am Modelle hervortreten.

Ich beginne damit, Ihnen eine Anzahl Modelle von Raumkurven zu demonstrieren, wobei natürlich eine besondere Schwierigkeit darin besteht, daß Sie die Modelle aus der Entfernung nicht hinreichend genau erkennen können und ich mich daher auf eine bloße Schilderung der Verhältnisse beschränken und Sie auffor-

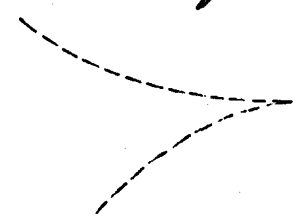
dern muss, die Dinge hinterher selber an dem Modell zu studieren.' Mein Vortrag als solcher muss dogmatische Form annehmen.

Zunächst hier ein Modell einer gewöhnlichen Raumkurve ohne singulären Punkt. Eine Hauptfrage wird sein: wie projiziert sich dieselbe von irgend einem Augenpunkt aus auf eine beliebig gestellte Projektionsebene?

Ist 1/ der Punkt beliebig, so erhält man eine singulari-, tätenfreie ebene Kurve;



ist 2/ der Punkt in der Asku-, lationsebene gelegen, so erhält die ebene Kurve einen Wende-, punkt, entsprechend dem Um-, stande, dass die Raumkurve die Askulationsebene durch-, setzt. (Dies liegt bereits unserm gewöhnlichen Erfahrungs-, bereich einigermassen fern);

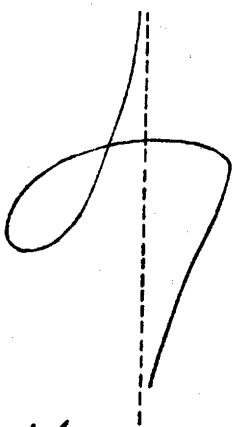


ist 3/ der Punkt auf der Tan-, gente gelegen, so erhält die Pro-, jektion eine Spitze.

1/ Es ist eine sehr wichtige Frage, ob man nicht die Demonstration komplizierterer geometrischer Figuren vor einem grösseren Publi-, kum durch geeignete technische Hilfsmittel verbessern kann; wir werden im nächsten Semester Versuche mit einem Projektionsapparat machen.

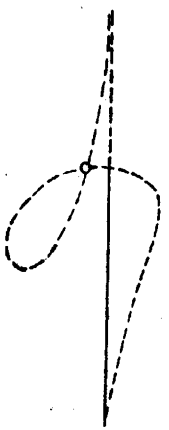
Diese Angaben über das Verhalten der Raumkurven werden wesentlich vervollständigt werden können, wenn wir uns jetzt insbesondere auf die Raumkurven 3ter Ordnung beziehen, da diese als algebraische Kurven gestatten, den Gesamtverlauf der jeweiligen Projektion in Betracht zu ziehen und nicht nur ein kleines Stück.

Sie hat z. B. nebenstehend gezeichnete Gestalt (einer Kurve, die aus einer Windung einer Art Schraubenlinie besteht).



(Hierzu wurde in Vortrag ein Modell der Kurve aus Messingdraht, sowie ein Modell der von den zugehörigen Tangenten gebildeten developpablen Fläche vorgezeigt).

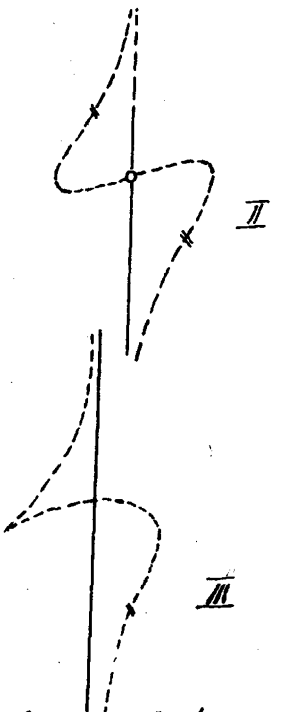
Als Projektion von einem beliebigen Punkt aus ergiebt sich zunächst eine ebene Kurve 3ter Ordnung mit einem wirklichen Doppelpunkt und einem Wendepunkt. Letzterer bedeutet natürlich einen Punkt auf der Raumkurve, der seine Oskulationsebene durch den Augenpunkt



hindurchschickt.

Diese Gestalt der Projektion ist aber nur eine von 2 an, deren möglichen.

In der Tat wird bei einer anderen Lage des Augenpunktes der Doppelpunkt der Projektionsfigur ein isolierter Punkt und der eigentliche Kurvenzug hat dann 3 reelle Wendepunkte d. h. es gibt dann auf der Raumkurve 3 solche Punkte, die ihre Osculationsebene durch den Augenpunkt senden. — Der Übergang von der Figur I zu II tritt ein, wenn der Augenpunkt auf einer Tangente der Raumkurve d. h. auf der Developpablen liegt. Die Kurve bekommt dann eine Spitze und behält daneben noch eine Wendung (eine Spitze, wie es nach der allgemeinen Theorie cf. oben der Fall sein muß).

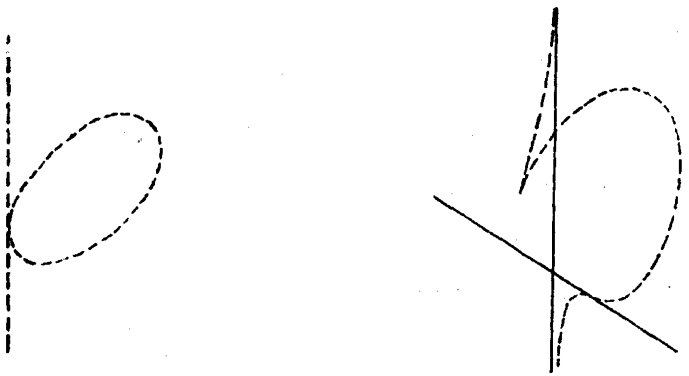


Soweit ist die Sache nicht schwer, weil sich die 3 gezeichneten Figuren ohne weiteres kontinuierlich aneinander anschliessen. Schwieriger wird sie aber, wenn wir die neue Frage aufwerfen:

Welche Gestalt hat die Projektionsfigur, wenn wir den Augenpunkt auf die Raumkurve selber fallen lassen?

Dies der algebraischen Theorie ist dann klar, daß die Kur-

re in einen Kegelschnitt und eine Gerade ausarten muss (der projicirende Kegel zerfällt in einen Kegel 2ter Ordnung und die zum Augenpunkt gehörige Oskulationsebene). Wie geschieht aber diese Abtrennung der Geraden von der Kurve aus der Kontinuität heraus? Ich sage, dass sich Fig. III in Fig. II' und von da aus in II verwandelt.



(N.B. zur Ausführung der Zeichnung: Natürlich darf die Spur der Oskulationsebene in III' nicht die Spitze der Kurve treffen, weil sonst die Kurve mit einer Geraden 6 Punkte gemein hätte).

Dies sind bereits sehr merkwürdige Figuren. Noch merkwürdigere aber kommen hervor, wenn wir die zugehörige developpable Fläche betrachten d.h. die von den Tangenten der Raumkurve gebildete Fläche. Diese Developpable wird, wie Sie in allen Büchern finden, von den Oskulationsebenen der Raumkurve umhüllt d.h. entlang den Tangenten der Raumkurve ist die jeweilige Oskulationsebene Tangentenebene

der Developpablen. Die Punkte der Raumkurve ergeben dabei eine Rückkehrkante der Fläche.

Es ist jedenfalls auf den ersten Blick wunderbar, daß eine Aufeinanderfolge von Tangenten eine solche Schmiege einer Fläche bilden kann, wie Sie im Modell sehen.

Die Sache wird aber noch merkwürdiger, wenn wir nach den ebenen Schnitten der Developpablen fragen.

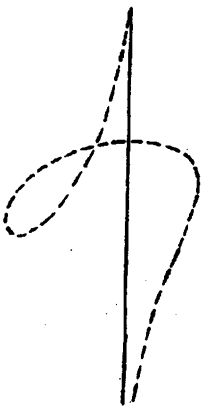
Die Betrachtung der ebenen Schnitte der developpablen Fläche ist allgemein zu reden das dualistische Gegenstück zu der Betrachtung der Kegel von dem Augenpunkte nach der Raumkurve, — so wird Jeder, der projektive Geometrie kennt, sofort die Antwort formulieren. In der Tat entsprechen sich (worauf ich hier nicht weiter eingehe) ganz allgemein dualistisch:

eine abwickelbare Fläche ~ eine Raumkurve
ein ebener Schnitt der Fläche ~ ein Projektionskegel der Kurve
eine Erzeugende der Fläche ~ eine Tangente der Raumkurve.

Bei unserer Kurve 3ter Ordnung gilt der Satz aber noch im speziellen Sinne, da das Tangentensystem einer Raumkurve 3ter Ordnung, wie wir im vorigen Winter sahen, sich in einem Nullsysteme selbst dualistisch entspricht. Das von den Punkten der Kurve und ihren Oskulationsebenen erzeugte Gebilde ist sich daher selbst dualistisch.

Fragen wir also nach den ebenen Schnitten der develop.

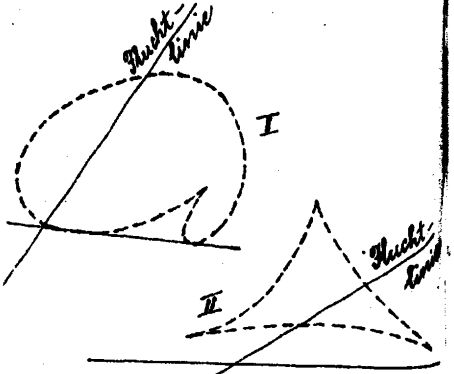
pablen Fläche, so haben wir nur die oben konstruierten Figuren I - IV zu dualisieren.



Die Figur I hat die Klasse 4, da der vorkommende Doppelpunkt die Klasse 6 der allgemeinen Kurve 5ter Ordnung um 2 Einheiten reduziert. Die Ordnung ist natürlich 3, woraus wir ohne weiteres schliessen:

Ein beliebiger ebener Schnitt der Developpablen ist eine Kurve von der 4ten Ordnung und der 3ten Klasse mit einer Doppeltangente (entsprechend dem einen Doppelpunkt der Projektionskurve).

Wir wissen, dass eine reelle Doppeltangente reelle und imaginäre Berührungspunkte haben kann. Wir erhalten also zweierlei Gestalten, entweder in I eine Doppeltangente mit reellen Berührungspunkten, wo der Kurvenzug dann eine Spitze hat, oder in II eine Doppeltangente mit imaginären Berührungspunkten, wo dann der reelle Kurvenzug drei Spitzen trägt. Diese Figuren entsprechen den früheren Figuren I u. II.

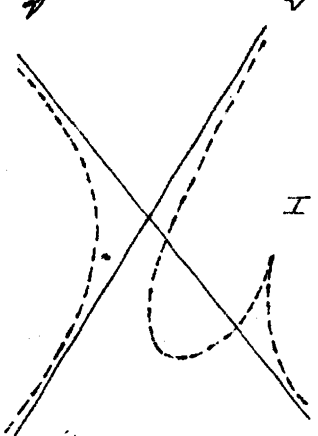


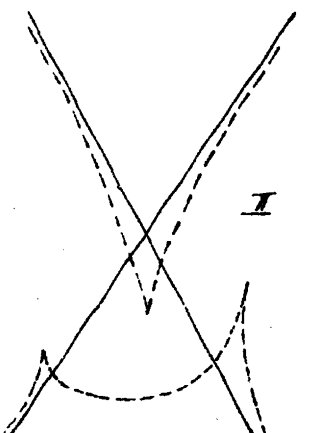
Wenn wir nun ausgerüstet mit diesen Kenntnis-

sen das Modell betrachten, so werden wir Schnitte der Developpablen von der gezeichneten Gestalt zunächst dort nicht finden. Wir müssen noch erst die Projektionen der gezeichneten Figuren studiren. Das ist ebenso wie bei den Kegelschnitten, die durch Projektion noch 3 verschiedene Gestalten (elliptische, hyperbolische, parabolische) erhalten können.

Wir legen also in unsern neuen Figuren I und II einen geradlinigen Schnitt durch die Kurven und betrachten die schneidende Gerade als Fluchtlinie einer geeigneten Projektion, worauf wir 2 Kurven mit je 2 Asymptoten erhalten, entlang denen die Äste ins Unendliche verlaufen.

Indem ich die Figuren nur qualitativ zeichne, kommen folgende beiden Gestalten heraus;



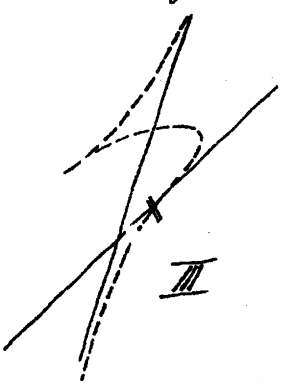


und diese so gezeichneten Figuren I u. II stellen sich nun in Wirklichkeit ein, wenn wir das Modell unserer Developpablen durch geeignete Ebenen schneiden (dem Umstande ent-

sprechend, daß sich das Modell mit 2 Mänteln ins Unendliche zieht).

Die weitere Frage ist nun aber: <u>Wie gestaltet sich der Schnitt, wenn wir die schneidende Ebene durch eine Tangente der Raumkurve legen?</u>

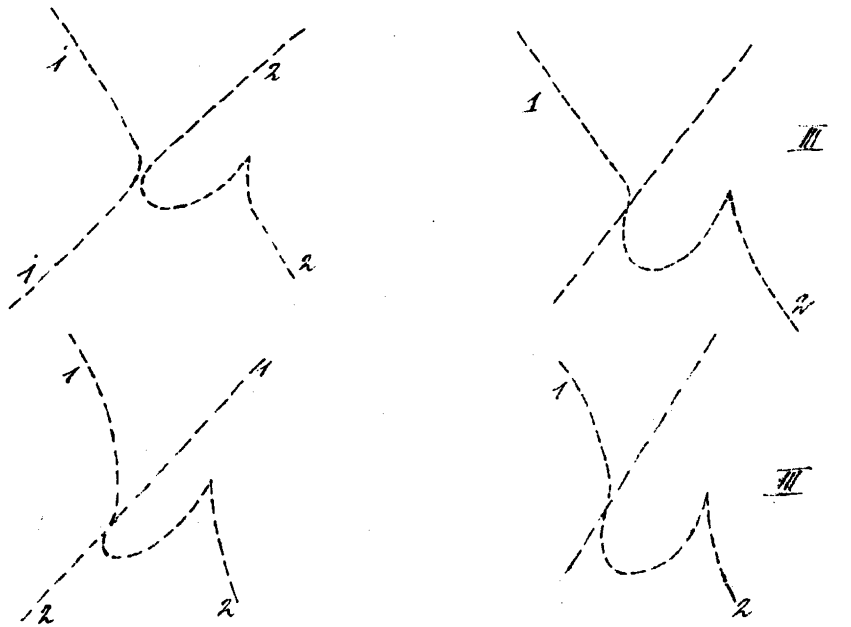
Es ist sofort klar, daß sich in diesem Falle die Erzeugenden der Developpablen von der Kurve 4ter Ordnung abtrennt und eine Kurve 3ter Ordnung und 3ter Klasse d.h. eine Kurve mit einer Spitze übrbleibt. Die nähere Überlegung zeigt, daß dieselbe unsere Tangente in ihrem Berührungspunkte mit der Raumkurve oskuliert.



Solche Sätze sind ja in abstracto leicht aufzustellen. Es fragt sich aber, wie der Übergang aus I und II zu unserer neuen Figur III konkret anschaulich bewerkstelligt wird (entsprechend dem Übergange der Kurve 3ter Ordnung mit Doppelpunkt in eine solche mit Spitze). Ich rage so und bitte Sie, sich am Modell davon zu überzeugen:

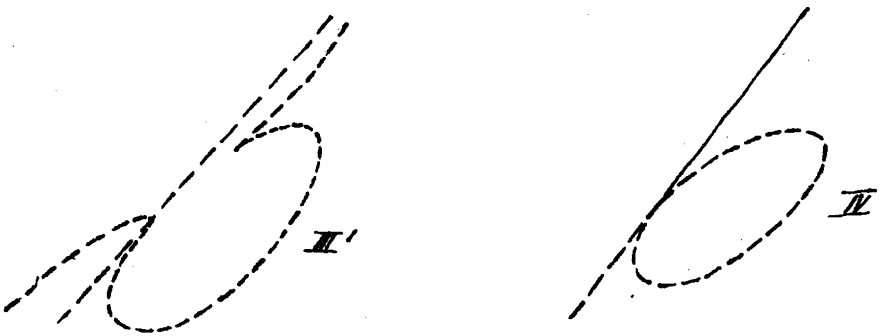
Wir erhalten die Figur III als Übergang aus den Figuren I und II, wenn wir bei I in der durch die nebenstehende Zeichnung erläuterten Weise die beiden Hyperbeläste (1 u. 2) zusammenrücken lassen und bei II (vgl. ebenfalls die

nachstehende Zeichnung) zwei der Spitzen, die nicht demselben Kurvenstück angehören, einander nähern. Ebenso können wir rückwärts von III zu I und II gelangen, indem wir die Wendetangente von III und die zugehörige Kurve in der ein oder anderen Weise verschmelzen.



Zum Schluss betrachten wir noch den Schnitt unserer Fläche mit einer Oskulationsebene. Wir erhalten einen Kegelschnitt mit einer doppelt zählenden Tangente (Fig IV). Diese Figur geht aus der Figur III hervor, indem wir die Zwischenfigur III einschalten. Diese erwächst offenbar daraus aus III, dass man bei festgehaltener Wendetangente den unendlichen Ast 1 herabbiegt, während der Ast II mit

der Spitze nach obengewendet wird. Läßt man Spitze und Doppelpunkt zusammenfallen, so entsteht die Figur IV



Übrigens ist dies schließlich derselbe Übergang, den wir schon auf pg. 430 studiert haben.

Nachdem ich diese Behauptungen aufgestellt, bleibt für jeden einzelnen von Ihnen die Forderung bestehen, sie an den Modellen selber zu prüfen und dadurch seine Anschauung zu beleben.

An die so besprochenen projektiven Eigenschaften der Raumkurven, speziell der Raumkurven 3ter Ordnung, schließen sich nun selbstverständlich die Betrachtungen über Maßverhältnisse an. Ich begnüge mich, hier auf die Theorie der Krümmung, Torsion und Abwickelung der Kurven hingewiesen zu haben. In Bezug auf letztere erwähne ich, daß man, je nachdem man eine Ebene auf einer Developpabeln oder einen Faden auf einer Kurve abrollt, die Bahn

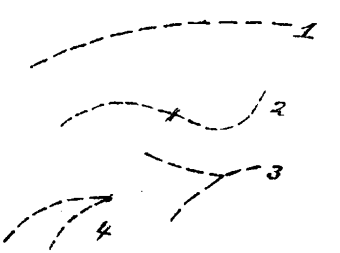
als Plan- resp. Tikarevolvente bezeichnet. Als modernes Lehrbuch, in dem diese Dinge in besonders übersichtlicher Weise eingehend betrachtet werden, zitiere ich:

G. Scheffers: Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, Leipzig 1900.

Weiter sage ich etwas über die singulären Punkte von Raumkurven.

In der Ebene können wir ein 4teiliges Schema aufstellen, indem wir das Verhalten von Kurvenpunkt (x) und Kurventangente (t) in Bezug auf Weitergehen resp. Stillstehen und Rückkehren beim Fortschreiten entlang der Kurve durch die Zeichen (+) und (–) charakterisieren. Dadurch erhalten wir neben dem gewöhnlichen Punkte die 3 gestaltlich zu unterscheidenden Arten singulärer Punkte, wie folgt:

x	t	
+	+	gewöhnlicher Punkt
+	–	Wendepunkt
–	+	gewöhnliche Spitze
–	–	Schnabelspitze



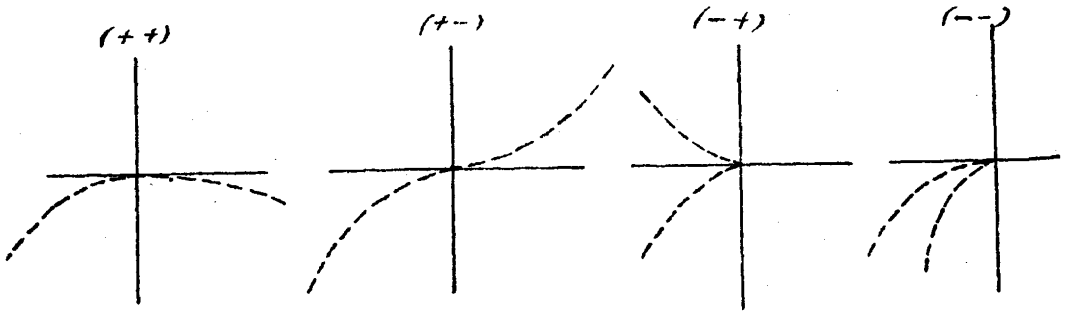
Das entsprechende Schema für 3 Dimensionen gab 1847 v. Staudt in seiner „Geometrie der Lage". Man hat hier außer Kurvenpunkt (x) und Tangente (t) noch die Schmiegungsebene (e) in Betracht zu ziehen und hier alle 8 Kombinationen der (+) resp. (–) Zeichen zu je dreien zu bilden.

p	t	e	p	t	e	p	t	e	p	t	e
+	+	+	+	−	+	+	−	−	−	−	+
+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	−	−

Man hat also rein gestaltlich 7 Arten singulärer Vorkommnisse bei den Raumkurven zu unterscheiden. Man hat für dieselbe keine besonderen Namen geschaffen. Immerhin ist klar, wie sie zu charakterisieren sind. Die 8 verschiedenen Fälle werden durch die Modelle erläutert, die ich Ihnen hier vorzeige und die von Dr. Wiener konstruiert sind.

Um die Auffassung zu erleichtern, gehe ich für einen Augenblick auf die ebenen Kurven zurück.

Indem wir den betrachteten Kurvenpunkt als Anfangspunkt und die Tangente als x-Axe eines rechtwinkeligen Koordinatensystems wählen, lassen sich die 4 Arten für die ebene Kurve unterscheidenden Fälle offenbar auch darnach auseinander halten, ob die Kurve, die im ersten Quadranten herankommt,



im Quadranten II, III, IV oder I weitergeht. Man vergleiche obige Figuren.

Es liegt nun nahe, den Analogieschluß zu machen, daß sich die 8 Vorkommnisse bei den Raumkurven durch den Verlauf der Kurvenfortsetzung in den 8 verschiedenen Oktanten des Koordinatensystems beschreiben lassen. Dies trifft in der Tat zu. Ich lege es etwas ausführlicher in folgenden Worten fest:

Man konstruiere sich ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, welches die in Betracht kommende Tangente der Raumkurve als eine Axe, die zugehörige Oskulationsebene als eine Ebene und den Berührungspunkt als Anfangspunkt besitzt. Kommt dann die Kurve im Oktanten I heran, so bleibt gerade eine 8-fache Möglichkeit, in welchem der 8 Oktanten sie ihre Fortsetzung finden soll, und diese 8 Gestalten decken sich mit denen, die wir oben nach v. Staudt aufzählten.

Wie dies im Einzelnen ist, muß an den Modellen studiert werden, da eine nur tabellarische Aufzählung wegen ihrer Gleichförmigkeit in der Auffassung nicht half. Gleichzeitig kommt an den Modellen die Frage nach den Projektionen der jeweiligen Raumkurven von einem wechselnden Augenpunkte aus zur Geltung, wovon wir im einfachsten Falle schon früher sprachen. Der Augen-

punkt wird dabei entweder 1/ beliebig oder 2/ auf der Oskulationsebene, oder endlich 3/ auf der Tangente gewählt. Dabei ist es merkwürdig, daß in den Projektionen starke Singularitäten der Raumkurve für das Auge verschwinden können. Beispielsweise liefert im Falle (-++) die Projektion von der Tangente aus eine ebene Kurve (++) ohne Singularität, resp. mit „maskierter" Singularität. Als weiteren merkwürdigen Satz erwähne ich, daß die Kurve (---) eine Schnabelspitze gibt, von welcher Seite man sie auch projizieren mag.

Im übrigen möchte ich hier die Anregung geben, daß die bezüglichen gestaltlichen Verhältnisse noch ausführlicher betrachtet werden. Insbesondere erwünscht die Aufgabe, systematisch die Gestalt der Developpablen, die sich in den 8 Fällen an die Raumkurve anschmiegt, zu betrachten und insbesondere zuzusehen, was für eine Schnitte bei derselben herauskommen und wie sie der Kontinuität nach zusammenhängen.

Von analytischer Seite existiert eine Litteratur der hier besprochenen Vorkommnisse, die ich kurz angeben will. Dabei ist die Annahme der Autoren, daß sich x, y, z in Potenzreihen; fortschreitend nach ganzen Potenzen von t, entwickeln lassen. Es handelt sich um folgende Aufsätze:

Fine, Über Singularitäten von Raumkurven, Diss. Leipzig 1885, auch American Journ. of math. 8;

Klaude, Über den Sinn der Windung in singulären Punkten von Raumkurven, ebenda Bd. 17 (1895);

Meder, Über eine Art von singulären Punkten von Raumkurven, J. f. Math. 116 (1895);

an diese Aufsätze müsste eine gestaltliche Diskussion der von mir gewünschten Art anknüpfen.

Damit schliesse ich ab, was ich über Raumkurven sagen wollte und wende mich zu den Flächen.

Denken wir dabei an die Unterscheidungen, die wir bereits bei den ebenen Kurven hatten (analytische, nicht-analytische, reguläre u.s.w.), so ist klar, dass diese hier in noch grösserer Zahl auftreten und dass es etwas ganz Partikuläres ist, wenn ich mich in meinen Bemerkungen auf algebraische Flächen beschränke, wie jetzt der Kürze halber geschehen soll.

Eine algebraische Fläche wird durch eine Gleichung definiert:

$$o = f(x, y, z), \text{ wo } f \text{ ein Polynom ist.}$$

Man pflegt die Terme in f so zu ordnen, dass man je die Glieder derselben Ordnung in x, y, z zusammennimmt

$$o = f_0 + f_1 + f_2 + \dots$$

Untersucht man die Fläche in der Nähe eines Punktes, so wählt man diesen zweckmässigerweise als Koordinatenanfangspunkt und es fällt dann das konstante Glied fort. Man zieht sodann die Fläche, allgemein zu reden, also in erster Annäherung durch $o = f$, d. h. durch die Tangentialebene in o, gegeben an. Man kann diese Gleichung geradezu als Definition der Tangentialebene ansehen und sagen:

Die Tangentialebene wird definiert, indem man die Glieder erster Ordnung für sich gleich Null setzt.

Will man eine grössere Annäherung, so setzt man

$$o = f_1 + f_2$$

und bezeichnet diese Fläche als Schmiegungsfläche 2ter Ordnung u. s. w.

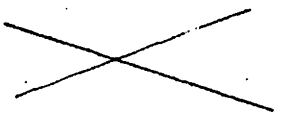
Bei diesem Ansatze ergiebt sich nun gleich eine Einteilung der Punkte der Fläche: Ist f_1 nicht identisch Null d. h. hat man eine bestimmte Tangentialebene, so spricht man von einem „einfachen" Punkt der Fläche; ist aber $f_1 \equiv o$ und $f_2 \not\equiv o$, so hat man einen Doppelpunkt u. s. w.

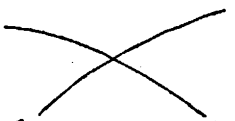
Was ist nun über die einfachen Punkte zu bemerken?

In erster Linie fragen wir, in welcher Kurve die Fläche von der Tangentialebene in einem solchen Punkte geschnit-

ten wird. Man geht dabei davon aus, daß die betreffende Kurve in erster Annäherung durch das gleichzeitige Verschwinden der beiden Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ gegeben sei; man vergleicht also die Kurve mit dem Schnitt der Tangentialebene und der Schmiegungsfläche 2ter Grades. Letzterer besteht offenbar aus 2 geraden Linien, die reell oder imaginär sein oder zusammenfallen können, und indem man diese Unterscheidung auf die Gestalt der Schnittkurve von Fläche und Tangentialebene übertragt, hat man folgende Kategorien.

Die Geraden sind reell ~ die Schnittkurve hat einen Doppelpunkt mit reellen Ästen





Die Geraden sind imaginär. ~ die Schnittkurve hat einen Doppelpunkt mit imaginären Ästen.

Die Geraden fallen zusammen ~ die Schnittkurve hat eine Spitze

Ich rekapituliere:

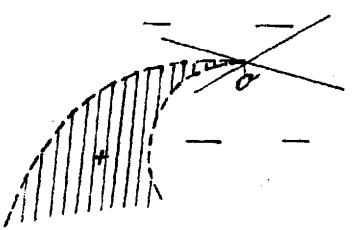
Abgesehen von höheren Vorkommnissen, wo $f_2 \equiv 0$,

schneidet die Tangentialebene die Fläche in einer Kurve mit Doppelpunkt, dessen Äste reell oder imaginär sind, oder auch zusammenfallen. Man spricht demzufolge von „hyperbolischer", „elliptischer" und „parabolischer" Flächenkrümmung.

Es ist übrigens leicht, sich hier verschiedene schöne Beispiele zu denken, wo (bei der in Rede stehenden Schnittkurve von Fläche und Tangentialebene) höhere Singularitäten auftreten, insbesondere zu untersuchen, wann eine Schnabelspitze als Schnittaufstritt u. dergl. Ist insbesondere $f_2 = 0$, so hat der Schnitt der Tangentialebene mit der Fläche einen 3-fachen oder noch höheren Punkt. Hieran schließt sich folgende Bemerkung:

Bekanntlich untersucht man in den elementaren Lehrbüchern über Differential- und Integralrechnung auch die Maxima und Minima von Funktionen zweier Veränderlicher. Es kommt dies auf die Untersuchung des Schnittes hinaus, welchen eine Fläche $z = f(x,y)$ mit einer horizontalen Tangentialebene gemein hat.

Nehmen wir nunmehr an, daß der Schnitt eine Schnabelspitze sei, und zwar daß sich im schraffierten Bereich die Fläche nach oben erhebt, im frei-



gelassenen Gebiet also nach unten herabsenkt, so ist zu-
nächst klar, dass dann im Berührungspunkte o weder
ein Maximum noch ein Minimum der durch die Fläche
vorgestellten Funktion $z = f(x\,y)$ vorliegt.

Betrachten wir aber eine Gerade durch o, so zeigt sich,
dass für jedes Azimut, unter dem wir geradlinig von
o ausgehen, ein echtes Maximum vorliegt, indem das z
längs den Geraden von o aus beginnend zunächst sich-
senkt. Es ist uns unmöglich, von O aus auf geradlinigem
Wege unmittelbar in das schraffierte Gebiet hinein zu
gelangen. Demnach genügt es zur Beurteilung der Frage,
ob ein Maximum oder Minimum einer Funktion von
2 Variablen vorliegt, nicht, die betreffende Untersuchung
für geradliniges Fortschreiten von O aus unter beli-
bigem Azimute anzustellen. Man muss auf einer Pa-
rabel vorwärts gehen, um in das schraffierte Gebiet
direkt hineinzugelangen.

Bei rein analytischem Ansatze aber erscheint die Sa-
che schwer verständlich. Und in der Tat haben hierü-
ber in allen Lehrbüchern falsche Behauptungen gestan-
den, bis vor ca. 20 Jahren zum ersten Male Pea-
no auf den richtigen Sachverhalt aufmerksam machte!
(Übrigens hat auch Weierstrass in seinen Vorlesungen
über Variationsrechnung immer die richtige Theorie zum

Vortrag gebracht.)

Natürlich können wir nun weiter bei den Flächen auch die metrischen Verhältnisse in Betracht ziehen. Es greift hier für Punkte, in denen $f_1 \neq 0$ und $f_2 \neq 0$, besonders die von L. Euler entwickelte allgemeine Krümmungstheorie Platz:

Man konstruiert sich in dem betreffenden Punkte die Normale, legt durch sie ebene Schnitte und konstruiert in ihnen die Krümmungskreise. Dann gibt es 2 aufeinander senkrechte Normalschnitte, wo die Krümmung ein Maximum resp. Minimum ist. Ich trage dies nicht besonders vor, erwähne aber, daß zur Erläuterung der gewöhnlichen Krümmungstheorie in einfachen Flächenpunkten von Chr. Wiener wieder Modelle konstruiert sind, welche die Krümmungskreise in den einzelnen Normalschnitten wiedergeben. (Die Modelle wurden vorgelegt.)

Schließlich mache ich noch auf die im Brill'schen Katalogs als „bohnenförmige Versuchsobjekte" bezeichneten Modelle aufmerksam, auf denen man die einzelnen Punkte hyperbolischer, elliptischer oder parabolischer Krümmung markieren soll. Es zeigt sich, daß unser Augenmaß da sehr unsicher ist, so daß die Definitionen der elementaren Krümmungstheorie be-

reits einen sehr abstrakten Charakter zu besitzen scheinen. Man empfindet dies besonders lebhaft, wenn man die betreffende Aufgabe an einer zu komplizierten, empirisch vorgelegten Fläche, wie etwa eine Porträtbüste vorstellt, durchzuführen sucht. Ich empfehle dies zu studieren.

Nunmehr gehe ich zu einer Besprechung der singulären Punkte von Flächen, speziell der Flächen 3ter Ordnung über. Nach unserer obigen Bemerkung läßt sich die Gleichung einer F_3 mit Doppelpunkt im Koordinatenanfangspunkt in der Form:

$$0 = f_2 + f_3$$

schreiben. Wir nehmen dabei an, daß $f_2 \neq 0$, so daß wir einen wirklichen Doppelpunkt der Fläche (und nicht etwa einen dreifachen Punkt) vor uns haben.

Man sagt dann gewöhnlich, daß der Kegel 2ten Grades $f_2 = 0$ in „erster Annäherung" den Verlauf der Fläche in dem Punkte 0 wiedergiebt und je nachdem dieser Kegel

a) ein eigentlicher Kegel ist { reell oder imaginär } oder

b) ein in 2 Ebenen zerfallen, der Kegel { die Ebenen können reell oder imaginär sein } oder endlich

c) ein in eine Doppelebene ausgearteter Kegel,

unterscheidet man

a) einen gewöhnlichen bezw. isolierten Doppelpunkt,

b) einen coplanaren Punkt,

c) einen uniplanaren Punkt der Fläche.

Die Frage, die sich hier infolge der allgemeinen Prinzipien stets die geometrische Anschauung in ihr Recht treten zu lassen, so formulieren ist:

Wie sieht eine Fläche 3ter Ordnung aus, die einen Doppelpunkt der einen oder anderen Art besitzt?

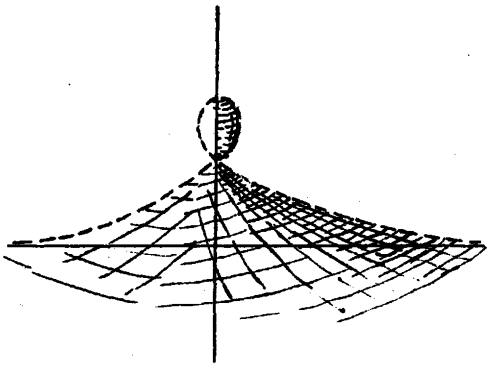
Vorab bemerke ich:

Wenn wir die Fläche $f_2 + f_3 = 0$ mit $f_2 = 0$ schneiden, so bleibt $f_3 = 0$ (ein Kegel 3ter Ordnung). Beide Kegel haben nach dem Bezout'schen Theorem $2 \times 3 = 6$ Erzeugende gemein:

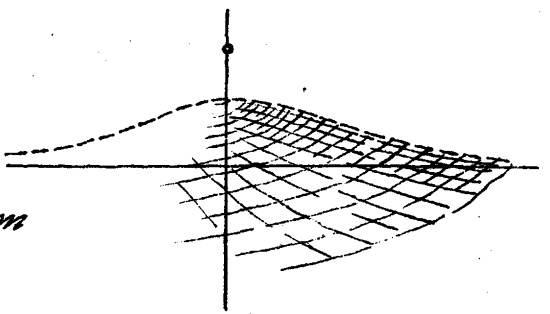
Durch einen Doppelpunkt einer Fläche 3ter Ordnung gehen also 6 gerade Linien der Fläche (wobei natürlich zu bedenken ist, daß diese geraden Linien reell oder imaginär sein, oder auch zusammenfallen können.)

Ich gebe nun Beispiele von F_3, bei denen die verschiedenen Arten von Doppelpunkten auftreten, führe aber nicht den Beweis dafür, daß die Dinge allgemein so sich liegen.

Um eine Fläche mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt zu erhalten, beschränken wir uns auf Rotationsflächen



und zeichnen in einem Meridianschnitt (xz-Ebene) eine gegen die z-Axe symmetrische Kurve 3ter Ordnung mit Doppelpunkt, die die x-Axe zur sog. Wendeasymptote hat (vergl. die Figur). Darnach ist das Bild der Fläche ganz klar. Die 6 Geraden durch den Doppelpunkt fallen hier offenbar imaginär aus.



Ähnlich konstruieren wir eine Fläche mit isoliertem Doppelpunkt. Man hat nur eine Kurve 3ter Ordnung mit isoliertem Doppelpunkt als Meridianschnitt zu zeichnen.

Des Weiteren spreche ich von einer Fläche, bei der die 6 Geraden, die durch einen einzelnen Doppelpunkt laufen, reell sind. Ich wähle nämlich eine Fläche mit 4 gewöhnlichen Doppelpunkten, die, um die Fläche leicht analytisch darstellen zu können, in den Ecken des Koordinatentetraders angenommen sein mögen. (Wir gebrauchen hier also vorübergehend Tetraederkoordinaten, wie es ausführlich im vorigen Wintersemester erläutert wurde). Die Gleichung ist dann, nachdem wir die bei der De-

finition der Tetraederkoordinaten noch zur Verfügung stehenden multiplizierenden Konstanten richtig gewählt haben:

$$0 = \sum_i \frac{1}{x_i'} = \frac{1}{x_1'} + \frac{1}{x_2'} + \frac{1}{x_3'} + \frac{1}{x_4'} .$$

Multipliziert man mit den Nennern herauf, so haben wir die Gleichung 3ten Grades in x_1', x_2', x_3', x_4'.

$$0 = x_2' x_3' x_4' + x_1' x_3' x_4' + x_1' x_2' x_4' + x_1' x_2' x_3' .$$

Gehen wir schließlich von den Tetraederkoordinaten (durch eine projektive Umgestaltung der Fläche) zu gewöhnlichen Koordinaten über entsprechend den Formeln:

$$x_1' = x, \quad x_2' = y, \quad x_3' = z, \quad x_4' = 1,$$

so heißt die Gleichung

$$0 = yz + xz + xy + xyz$$

(ein Doppelpunkt liegt hier in 0, die 3 anderen unendlich fern).

In der so geschriebenen Gleichung haben wir die beiden zum Koordinatenanfangspunkt gehörigen Kegel $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ unmittelbar vor uns. Der Kegel $f_2 = 0$, der die Fläche in der Nähe von 0 in erster Annäherung darstellt,

$$0 = yz + xz + xy$$

enthält offenbar die 3 Koordinatenaxen. Nehmen wir

$$f_3 = 0 = xyz$$

hinzu, so besteht dieser Kegel aus den 3 durch 0 gehenden

den Koordinatenebenen, er enthält also die Koordinaten-axen doppelt, so daß wir den Satz erhalten:

Die 6 Erzeugenden, die bei unserer Fläche durch den Knotenpunkt gehen, fallen paarweise in die 3 Koordinatenaxen zusammen.

Sie werden ferner sehr leicht selbst beweisen:

Entlang dieser Erzeugenden fällt die Tangential-ebene der Fläche mit derjenigen des Kegels $yz + zx + xy = 0$ zusammen, hat also konstante Richtung.

Diese Sätze gelten wegen ihres projektiven Charakters auch für die F_3 mit 4 im Endlichen gelegenen Knoten. Hiervon möge man sich am Modell überzeugen, das ich vorzeige. Das Modell zeigt zunächst als Gerade, die nach ihrer ganzen Erstreckung auf der Fläche liegen, die 6 Kanten des Doppelpunkttetraeders, längs denen die Tangentialebenen jeweils konstant verlaufen, davon abgesehen aber noch als Schnitt der Fläche mit einer bestimmten horizontal verlaufenden Ebenen zwei weitere Gerade, längs denen sich die Tangentialebene dreht.

Nunmehr gehe ich zu den biplanaren Punkten der F_3 über.

Hier ist die Auffassung schon nicht mehr so einfach, man hat von den gestaltlichen Verhältnissen eines biplanaren Punktes keine unmittelbare Vorstellung mehr, son-

dern muß sich die Sache in konkreto überlegen.

In unserer Gleichung

$$0 = f_2 + f_3$$

sei f_2 das Produkt zweier unterschiedener Linear„faktoren; indem wir $f_2 = 0$ setzen, erhalten wir zwei getrennte Ebenen. Zunächst nehmen wir die beiden Ebenen konjugiert imaginär an, setzen also etwa

$f_2 = (x + iy)(x - iy)$, so daß die z – Axe der reelle Schnitt der beiden Ebenen ist. Die Fläche selbst möge dann weiter die einfache Gleichung

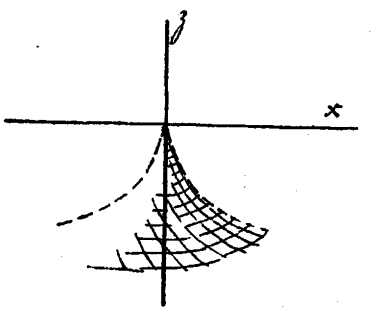
$$0 = x^2 + y^2 + z^3 \text{ haben.}$$

Wie sieht der hier auftretende biplanare Punkt aus?

Wenn wir sagen, er werde in erster Annäherung durch die beiden durch ihn gehenden, konjugiert – imaginären Ebenen vorgestellt, so ist das bei geeigneter Interpretation nicht falsch, aber nicht ohne weiteres verständlich. Ich frage vielmehr so:

Unsere Fläche ist eine Rotationsfläche. Wir zeichnen zunächst den Meridian-Schnitt mit der xz – Ebene:

$$0 = x^2 + z^3$$



Dies ist eine Kurve 3ter Ordnung mit Spitze in O, vergl. die Figur. Die Fläche selbst erhalten wir durch

Rotation um die z-Axe. [1] Ich spreche das Resultat gleich in allgemeiner Form aus:

Hat ein biplanarer Punkt imaginäre Ebenen, dann hat die Fläche dort die Gestalt einer zugespitzten Dorne.

Schwerer aufzufassen ist der Fall eines biplanaren Punktes mit reellen Ebenen.

Als Beispiel nehme ich

$v = x^2 - y^2 + z^3$, wo die Ebenen des biplanaren Punktes durch

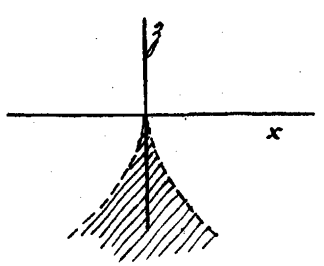
$x + y = 0$, $x - y = 0$ gegeben sind d. h. durch 2 aufeinander senkrechte Ebenen durch die z-Axe, unter 45° gegen das Koordinatensystem xy orientiert.

Schneide ich die Fläche mit einer der Ebenen, so bleibt

$f_3 = 0$ d. h. $z^3 = 0$. Also:

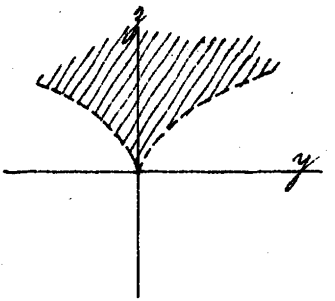
Jede der beiden Ebenen schneidet die Fläche in 3 geraden Linien. Ist speziell $f_3 = z^3$, wie wir der Einfachheit halber voraussetzten, so schneidet jede der Ebenen bei vertikal gestellter Axe des biplanaren Punktes die Fläche in einer 3fach zählenden horizontalen Geraden.

Die Schnitte mit den Meridianebenen durch die z-Axe werden nun sehr merkwürdig



[1] Die Fläche bildet also einen Übergangsfall zwischen den beiden Figg. auf pg. 449.

Schneiden wir mit der Ebene $y = 0$, so wird $v = x^2 + z^3$, d.h. wir haben unsere obige Kurve mit nach oben gerichteter Spitze. Als Schnitt mit der Ebene $x = 0$ folgt $v = -y^2 + z^3$, d.h. eine ebenso solche Kurve mit nach unten gerichteter Spitze. Während man also die Ebene $y = 0$ in die Ebene $x = 0$ dreht, kehrt die Spitze ihren Sinn um; der Übergang tritt in den Ebenen



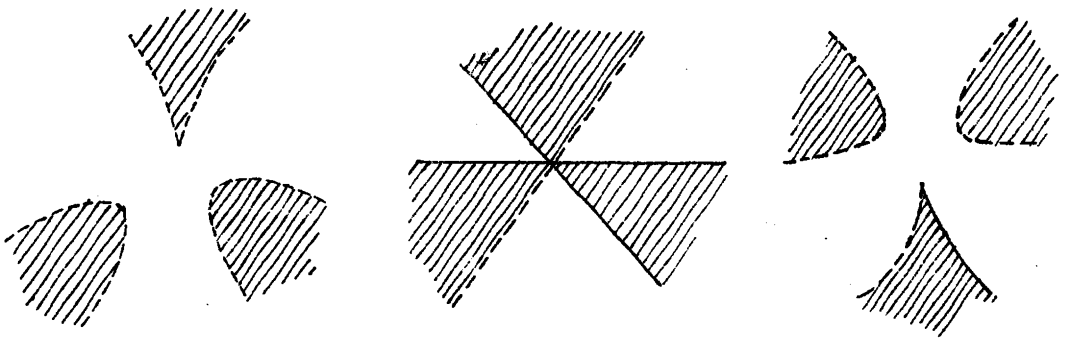
$y + x = 0$ und $y - x = 0$ ein, deren Schnitt wir bereits studierten. Es besteht also ein Satz, den ich gleich allgemein in folgender Form ausspreche:

Die Meridianebenen, die sich durch die vertikale, stellte Axe des biplanaren Punktes legen lassen, schneiden im allgemeinen in einer Kurve mit Spitze, sodass die z-Axe Spitzentangente ist. Im Besonderen aber, wenn die Meridianebenen Tangentialebenen des biplanaren Punktes sind, dann schneiden sie in 3 geraden Linien.

Das Büschel der Meridianebenen wird so durch die beiden Ebenen des biplanaren Punktes in 2 Halbbüschel zerlegt. Die Sache ist natürlich so, dass die Schnittkurven der Meridianebenen des einen Büschels die Spitze nach oben, die Schnittkurven der Meridiankurven des an-

deren Büschel die Spitze nach unten kehren.

Es entsteht nun wieder die Aufgabe, dies sich anschaulich vorzustellen. Das Modell, welches ich vorzeige, verwirklicht den allgemeinen Fall des biplanaren Punktes, wo in den beiden Tangentialebenen 3 reelle gerade Linien liegen. Hier die Reihenfolge der Schnittkurven,



aus denen man sich die Gestalt der Fläche zusammensetzen mag.

Ebenso wie die hiermit besprochene Gestalt des biplanaren Punktes ohne nähere Überlegung nicht leicht vorstellbar ist, so ist es auch im Falle des uniplanaren Punktes.*)

Wir haben hier „als erste Annäherung" eine Doppelebene dargestellt durch die Glieder 2ter Ordnung, sagen wir

*) Diese gestaltlichen Angaben über biplanare und uniplanare Punkte wurden wohl zuerst von Kummer und Schläfli gemacht; später habe ich sie in meiner Theorie der Gestalten der Flächen 3ter Ordnung benutzt (Math. Ann. 6 (1873).

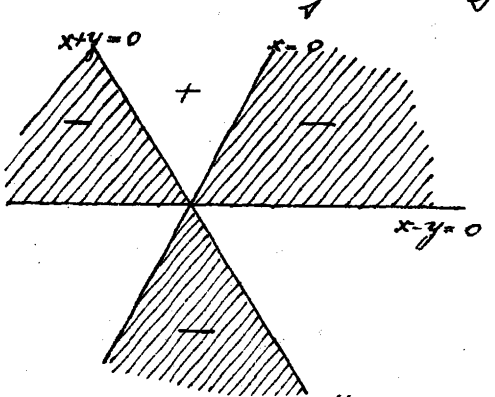
einfach $z^2 = 0$. Dann lautet die Gleichung der Fläche

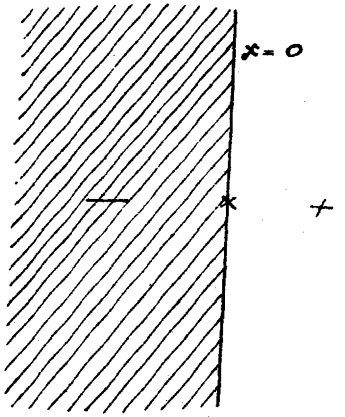
$$v = z^2 + f_3 ;$$

f_3 wählen wir der Einfachheit halber so, daß nur x, y in ihm vorkommt, und haben 2 Fälle, deren Bedeutung sofort klar sein wird. Wir setzen das eine Mal

$$f_3 = x(x^2 - y^2), \text{ das andere Mal}$$
$$f_3 = x(x^2 + y^2) \text{ d. h.}$$

$f_3 = 0$, $f_2 = 0$ gibt entweder 3 reelle Gerade oder eine reelle oder 2 imaginäre Gerade:





Der allgemeine Satz ist:

<u>Die Ebene der uniplanaren Punkte schneidet in 3 Geraden durch 0, von denen entweder eine oder alle 3 reell sind.</u>

Für z selbst folgt aus der Gleichung

$$z = \pm \sqrt{-x(x^2 + y^2)}$$
$$z = \pm \sqrt{-x(x^2 - y^2)} , \text{ oder:}$$

Das z wird da reell, wo f_3 negativ ist, und zwar

existieren für diese Gebiete je 2 reelle Werte von z. Also überdeckt die Fläche 3ter Ordnung von oben gesehen diejenigen Partien der xy-Ebene doppelt, die im Bilde schraffiert sind, die anderen gar nicht.

Ich erläutere dies noch ein wenig:

Sind die 3 Erzeugenden in der uniplanaren Ebene reell, so zieht sich die F_z von 3 Seiten her in der Weise in den uniplanaren Punkt hinein, daß sie von oben gesehen 3 Sektoren der x'y-Ebene doppelt zu überdecken scheint, andernfalls von einer Seite her. Jeder ebene Schnitt durch 0, der nicht gerade in die x'y-Ebene fällt, hat in 0 eine Spitze.

Ich bemerke noch, daß dies der allgemeinste Typus eines uniplanaren Punktes ist, wie ich nicht weiter ausführe. Als Beispiele mögen einige noch von Kummer modellierte Flächen 4ter Ordnung dienen, in denen mehrere solcher uniplanaren Punkte vorhanden sind.

Zusammenfassend mögen wir sagen:

Die eigentliche Gestalt der biplanaren und uniplanaren Punkte der algebraischen Flächen wird uns erst klar, wenn wir nicht nur die Glieder 2ter Ordnung, sondern auch die Glieder 3ter Ordnung in Betracht ziehen.

Mit unsern letzten Überlegungen werden wir so nahe an die Gestalten der Flächen 3ter Ordnung herange-

führt, dass ich zum Schluss dieselben allgemein noch näher vorführen will.

Wenn ich zunächst zu der Theorie der F_3 einige historische Angaben machen soll, so erwähne ich, dass

1849 Cayley und Salmon nachwiesen, dass auf der F_3 27 Gerade existieren.

Seitdem ist deren Gruppierung vielfach studiert worden, besonders diskutierte

1863 Schlaefli im Einzelnen, wenn diese reell oder imaginär sein mögen, und betrachtete auch die Singularitäten, die bei einer F_3 auftreten können.

1873 fallen meine eigenen Untersuchungen über die gestaltlichen Verhältnisse der F_3 in Math. Ann. 6.

Daran anschliessend gab dann

1879 Rodenberg in Math. Ann. 14 eine analytische Bestätigung meiner durch geometrische Kontinuitäts-betrachtungen gefundenen Resultate. Andererseits hat aber auch Rodenberg im Verlage von Brill im genauen An-schluss an meine Untersuchungen eine Reihe von Model-len der F_3 erscheinen lassen, von denen ich eine Aus-wahl hier vorführe.

Wenn ich nun gleich mit den Gestalten der F_3 begin-nen soll, so ist das oberste Prinzip, dass wir die uns-von pg. 450 schon bekannte Figur mit 4 reellen Dop-

pelpunkten zum Ausgangspunkt wählen und von hier aus durch kontinuierlichen Übergang (Auflösung der Doppelpunkte) allgemeinere Flächen bilden. (Vgl. das analoge Vorgehen bei den ebenen Kurven n.! Ordnung, wo wir von einer Kurve mit zahlreichen Doppelpunkten [1] durch Auflösung derselben zu Nachbarkurven fortschritten).

Oben wiesen wir nun auf der Fläche, die uns jetzt als Ausgangsfläche dienen soll, bereits die 27 Geraden nach, indem nämlich zu den 6 Kanten des Tetraeders, deren jede 4 mal zählte, noch 3 einzeln verlaufende horizontale Gerade zutraten.

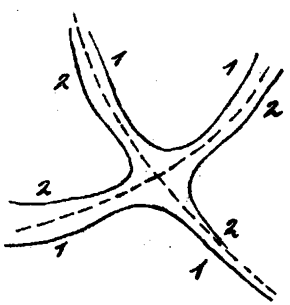
Wenn wir diese Flächengestalt hier zugrunde legen, so ist selbstverständlich, daß wir alle kollinearen Umformungen derselben Fläche als gleichberechtigt ansehen, anderenfalls würde die Mannigfaltigkeit der F_3 – in deren Gleichung 19 Konstante auftreten –, gar nicht zu übersehen sein! Es ist dies derselbe Standpunkt, als wenn wir in der Ebene Ellipse, Parabel und Hyperbel nicht weiter unterscheiden.

So ist es theoretisch. Praktisch dürfen wir diesen, gewissermassen vornehmen, Standpunkt erst einnehmen, wenn wir im Auffassen kollinearer Umformungen geübt sind. Wir müssen also zunächst die verschiedenen Formen kennen lernen, die durch Kollineation aus

[1] nämlich einer Kurve, die in lauter Kurven niederer Ordnung zerfallen war.

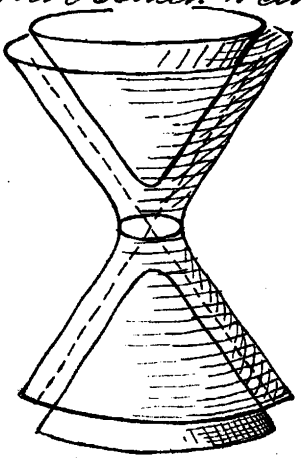
dem Ausgangsmodell entstehen, etwa so, daß wir dasselbe mit verschiedenen Ebenen schneiden und diese dann der Reihe nach als Fluchtebenen ins Unendliche projizieren und die entstehenden Flächenformen studieren, sowie auch modellieren, um hinterher in allen nur die gemeinsamen Eigenschaften zu sehen und die Unterschiede als gleichgültig unberücksichtigt zu lassen. (Man darf die Detailkenntnis erst verachten, wenn man sie besitzt, nicht vorher). Als Resultat ergiebt sich: So gut man Ellipse und Hyperbel (die Parabel sei als Übergangsfall hier bei Seite gelassen) unterscheidet, je nach der Beziehung des Kegelschnitts zur unendlich fernen Geraden, so kann man den F_3 mit 4 reellen Doppelpunkten 5 Arten nach ihrer Beziehung zur unendlich fernen Ebene unterscheiden. Diese 5 Arten sind sämtlich modelliert und ich zeige Ihnen hier die Modelle vor. Wir werden diese 5 Arten weiterhin nicht mehr ausdrücklich unterscheiden.

Von diesen Flächen gehen wir nun durch Auflösung der Doppelpunkte zu den Nachbarflächen über.



Dabei knüpfe ich an die Figur in der Ebene an. Ersichtlich können wir eine Kurve mit Doppel-

punkt in 2 verschiedene Kurven ohne Doppelpunkt (1 und 2 in der Figur) auflösen. Diese beiden Weisen sind an sich gleichwertig.



Gehen wir nun aber zum Raume über dadurch, daß wir diese Kurven um die ge, zeichnete vertikale Linie ro, tieren lassen, so erhalten wir für die entstehenden Flächen einen charakteristischen Un, terschied. Die eine (1) hat den Typus eines 2-schaligen Hyperboloids (besteht aus 2 getrennten Flächenteilen), die andere (2) hat den Typus eines einschaligen Hyper, boloids (i.e. einer Fläche, welche an der Stelle des frü, heren Doppelpunktes eine Einschnürung aufweist). Indem ich die beiden Prozesse, die bei der Entstehung der Fläche aus derjenigen mit dem Doppelpunkte zur Gel, tung kommen, beziehungsweise als Abtrennung (der an den Doppelpunkt heranreichenden Flächenteile) mit dem symbolischen Zeichen (−), und als Verschmelzung (die, ser Flächenteile) mit (+) bezeichne, haben wir den Satz:

<u>Ein Doppelpunkt einer Fläche kann beim Übergang zur Nachbarfläche 2 Prozessen unterworfen worden sein</u>

Prozess der Abtrennung und denjenigen der Verschmelzung.

Gehen wir nun von unserer Ausgangsfläche in der Weise zu der Nachbarfläche über, dass wir sämtliche Doppelpunkte den beiden Prozessen unterwerfen, so haben wir zusammenfassend 5 Möglichkeiten, die durch das Schema

+ + + +	+ +	— —
+ + + —	+ —	— — — —

angedeutet sind.

Überlegen wir uns, wie diese Flächen aussehen, so zeigt sich, dass wir durch unsere 5 Möglichkeiten für die singularitätenfreien Flächen 4 einteilige und 1 zweiteilige Fläche (— — —) bekommen. Bei letzterer wird in der Tat durch Abtrennung aller Knoten ein ovalartiger Teil frei von einem gewellten Teile der Fläche, die umgeben sein; die übrigen Flächen bestehen alle je aus einem Stück.

Es zeigt sich nun, dass diese 5 Fälle genau den Arten entsprechen, die Schläfli nach der Realität der Geraden unterschieden hat.

Das Gesetz ist folgendes:

Eine auf der Ausgangsfläche verlaufende Tetraederkante verwandelt sich bei der abgeleiteten Fläche in eine

ter imaginäre gerade Linien, sobald auch nur einer der Doppelpunkte, den sie mit einem anderen verband, dem Prozeß der Abtrennung unterworfen sind.

Umgekehrt aber:

Eine Tetraederkante, die zwei Doppelpunkte verbindet, die beide dem Prozeß der Verschmelzung unterworfen werden, spaltet sich beim Übergang zur Nachbarfläche in 4 reelle Gerade.

Nach dieser Regel erhalten wir bei unsern 5 Flächen

$3+6\times4=27$ $3+1\times4=7$

$3+3\times4=15$ $3+0\times4=3$ $3+0\times4=3$

reelle Gerade, wobei die letzte Flächenart von der vorherigen dadurch unterschieden ist, daß sie aus 2 Stücken besteht. Dies stimmt genau mit der von Schläfli gegebenen Aufzählung.

Die Bedeutung dieses Resultates wird noch durch folgenden Satz gesteigert.

Die so erhaltenen Repräsentanten der 5 Schläfli'schen Flächenarten ohne Doppelpunkt sind zugleich vollgültige Repräsentanten der einzelnen Flächenarten im Sinne der Analysis situs, d.h. 2 Flächen derselben Schläfli'schen Art gehen auseinander durch blosse kontinuierliche Änderung der Gestalt hervor, ohne daß wir eine Fläche mit Doppelpunkt zu passieren brauchen, oder

auch alle Flächen derselben Art bilden in dem repräsentierenden Raume von 19 Dimensionen, der uns die Gesamtheit der Flächen 3ter Ordnung vorstellt, ein zusammenhängendes Gebiet.

Sie haben also in den F_3, die wir aus der Ausgangsfläche mit 4 Knoten durch die Prozesse (+) und (−) ableiten, typische Beispiele, wie die Schlaefli'schen Arten anzusehen. (Natürlich ist es wichtig, die erhaltenen Flächen durch kollineare Umformung umzugestalten, oder auch die 5 Flächentypen der F_3 mit 4 reellen Doppelpunkten zur Hand zu nehmen und an jedem Typus die Prozesse (+) und (−) anzubringen).

Aber nicht nur die F_3 ohne Doppelpunkt, sondern auch die F_3 mit beliebigen singulären Punkten können wir aus unserer F_3 mit 4 Doppelpunkten durch kontinuierliche Umformung herausbringen, und auch hierzu geben die Rodenberg'schen Modelle zahlreiche Beispiele. Ich kann das hier leider nicht genauer ausführen.

Wir fragen weiter: <u>Wie gestaltet sich die analytische Behandlung der vorgeführten Modelle und von welcher Gleichungsform der F_3 geht man am besten dabei aus?</u>

Ich komme da auf die Entdeckung von Sylvester,

zu sprechen, nämlich dass es für die F_3 ein und nur ein sogenanntes Pentaeder gibt.

Hat man 5 Ebenen im Raume, von den keine 4 durch einen Punkt und keine 3 durch eine Gerade gehen, so kann man das Koordinatensystem so fixieren, dass $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0$, $\ldots$ $x'_5 = 0$ die Gleichung der Ebenen werden und noch eine beliebig anzunehmende lineare Relation zwischen den $x'_1, x'_2, \ldots x'_5$ identisch besteht. Wir wählen diese Relation der Einfachheit halber als $\sum_1^5 x'_i = 0$. Sylvester hat nun gefunden, dass für das ausgezeichnete, nach ihm benannte Pentaeder in der Gleichung für die Fläche nur noch die Cuben der x' vorkommen, letztere also (immer unter der Bedingung $\sum_1^5 x'_i = 0$) $\sum_1^5 i\, x'^3_i = 0$ lautet.

An diese kanonische Gleichungsform von Sylvester hat nun Rodenberg angeknüpft, um die geschilderten geometrischen Verhältnisse zu bestätigen. Die Gleichungsform enthält nur noch 4 von den ursprünglich in der Flächengleichung auftretenden 19 Konstanten, und diese 4 müssen notwendigerweise bleiben, da nur 15 durch eine geeignete Koordinatentransformation zerstört werden können. Dabei können die Ebenen $x'_i = 0$ natürlich noch reell oder imaginär sein.

Wir fassen insbesondere den Fall reeller Pentaeder

ebenen ins Auge und erhalten aus der Sylvester'schen Gleichungsform eine besonders einfache, von Clebsch als Diagonalfläche bezeichnete F_3, wenn wir die x_i sämtlich = 1 wählen. Diese Diagonalfläche ist eine F_3 mit 27 reellen Geraden, welche in unserem Modell, welches ich vorzeige, deutlich dargestellt sind. Das betr. Modell ist ursprünglich auf direkte Anregung von Clebsch durch A. Weiler ausgeführt worden, der mir auch bei meinen eigenen Arbeiten über Flächen 3ter Ordnung behilflich gewesen ist.

Was hat diese Fläche nun Besonderes, und woher ihr Name?

Schneiden wir die Fläche mit der Pentaederebene $x_1' = 0$ so erhalten wir zunächst in der Ebene $x_1' = 0$ selbst ein Vierseit: $x_2' = x_3' = x_4' = x_5' = 0$, gebildet von den Spuren der übrigen 4 Pentaederebenen, und ausserdem die Schnittkurve mit der Fläche

$$x_2'^3 + x_3'^3 + x_4'^3 + x_5'^3 = 0.$$

Nun zeigt sich (vermöge $x_2' + x_3' + x_4' + x_5' = 0$), dass diese Schnittkurve aus den 3 Diagonalen des genannten Vierseits besteht. Daher der Name der Fläche. Also: Der Name „Diagonalfläche" kommt davon, dass die Fläche in jeder der 5 Pentaederflächen die 3 Diagonalen derjenigen Vierseits enthält, welches aus der Pentaeder-

ebene von den übrigen 4 ausgeschnitten wird.

Damit sind zunächst 3 x 5 = 15 Geraden auf der Fläche nachgewiesen. Auf die fehlenden 12 gehe ich hier nicht weiter ein; Sie werden dieselben auf dem Flächenmodell leicht herausfinden.

Von den 15 Geraden gilt als weiterer Satz, daß sie sich zehnmal zu dreien schneiden. Man hat nur zu bedenken, daß in jeder Pentaedrecke (wo 3 Ebenen des Pentaeders sich schneiden) 3 Diagonalen (in jeder Ebene eine) zusammenlaufen, und daß das Pentaeder 10 Ecken hat. Also:

Die 15 Geraden laufen zehnmal zu 3 durch die Eckpunkte des Pentaeders und schneiden sich also kurz gesagt 10 mal zu je 3. Dies ist am Modell wieder leicht nachzusehen.

Damit bin ich hier am Ende. Sie werden jetzt in grossen Umrissen die Lehre von den Gestalten der F_3 verstehen; die Einzelheiten müssen dem Selbststudium vorbehalten bleiben. –

Und nun lassen Sie mich diese Vorlesung mit folgender Überlegung schliessen:

Ich habe in der Vorlesung allerlei vorgetragen, was gewöhnlich nicht in den Lehrbüchern über die

behandelten Gegenstände zu finden ist, was aber die Voraussetzung und stillschweigende Annahme der gewöhnlichen Entwickelungen bildet. Ich wollte sie damit veranlassen, mit freiem Blick und unabhängigem Urteil die Dinge selbst zu erfassen. Denken Sie etwa an das, was ich über die empirische Kurve oder Fläche sagte, und an die konventionelle Beschränkung der Betrachtung auf analytische Gebilde.—

Mit der Mathematik ist es wie mit der bildenden Kunst. Es ist nicht nur nützlich, sondern durchaus notwendig, daß man von seinen Vorgängern lernt. Wenn man sich aber ausschließlich auf das Studium des Überkommenen beschränkt, aber nur auf dem weiterbaut, was man in den Büchern liest, so entsteht das, was ich als scholastisches System bezeichne. Hiergegen ergeht dann die Mahnung:

Zurück zur eigenen lebendigen Auffassung, zurück zur Natur, welche die nächste Lehrmeisterin bleibt!

Ende.

Auszug

aus

dem Gutachten der Göttinger philosophischen Fakultät betreffend die Beneke-Preisaufgabe für 1901.

von

Felix Klein in Göttingen *)

Die philosophische Fakultät hatte im März 1898 folgende Aufgabe gestellt **):

„Als allgemein geltende Grundlage für die mathematische Behandlung der Naturerscheinungen ist lange Zeit hindurch das Prinzip der Stetigkeit oder noch spezieller die Darstellung durch unbeschränkt differentiierbare Funktio-

*) Das betr. Gutachten ist in extenso in den Göttinger Nachrichten vom April 1901 (Geschäftliche Mitteilungen, Heft 1) publiziert; ich bringe hier denjenigen Teil zum Wiederabdruck, der allgemeines mathematisches Interesse bieten dürfte. F. Kl.

**) Vergl. Math. Annalen, Bd. 50, pg. 603 - 604.

nen angesehen werden. Diese Grundlage wurde von den Erfindern der Differential- und Integral-rechnung als etwas Selbstverständlicher einge-führt; die Fortschritte der mathematischen Wis-senschaft haben aber je länger je mehr gezeigt, dass dabei eine sehr grosse Zahl stillschweigender Voraussetzungen zu Grunde lag, zu denen man bei der immer vorhandenen Ungenauigkeit un-serer sinnlichen Wahrnehmungen keineswegs gezwungen ist. Auch tritt mit dem genannten Ansatze die Annahme der molekularen Konsti-tution der Materie von vornherein in Wider-spruch. Die Fakultät wünscht eine von aktuel-lem wissenschaftlichem Interesse getragene Schrift, welche die hier in Betracht kommenden Fragen in allgemein verständlicher Weise dar-legt und die Zulässigkeit, bezw. Zweckmässig-keit der üblichen Darstellung einer eingehen-den Prüfung unterwirft. Die Schrift kann mehr nach mathematischer oder philosophischer und psychologischer Seite ausholen; historische Studien sind erwünscht, werden aber nicht verlangt."

Auf diese Aufgabe hin sind bei dem Dekan der Fakultät drei Arbeiten rechtzeitig eingelaufen,

welche weiter unten noch näher charakterisiert werden sollen. Vorab möge hier eine ausführlichere Erläuterung der Preisfrage gegeben werden, einmal, weil die ursprüngliche Formulierung in ihrer Kürze verschiedentlich nicht richtig aufgefaßt worden ist, dann aber auch um einen Maßstab für die Beurteilung der eingelaufenen Arbeiten zu haben.

Die Fragestellung ist vielfach dahin gedeutet worden, oder er ist doch als ihr Kern angesehen worden: man solle entscheiden, ob man die Materie besser als molekular aufgebaut oder als kontinuierlich zu denken habe, ob insbesondere die modernen Fortschritte der Naturwissenschaft mehr in der Richtung der einen oder der anderen Auffassungsweise liegen.

Eine derartige Erörterung, von einem unabhängigen Standpunkte aus und mit wirklichem Überblick über die neuesten Fortschritte der in Betracht kommenden naturwissenschaftlichen Gebiete unternommen, wäre nicht ohne Verdienst. Hier jedenfalls sollte dabei hervorgekehrt werden, daß sich die zweierlei Auffassungsweisen gerade auch in der neuesten Zeit alternierend

immer wieder ablösen. Nachdem Maxwell in der Elektrizitätslehre die Theorie des Kontinuums zu Ehren gebracht hat, steuern wir bei derselben jetzt in Folge des Studiums der Kathodenstrahlen und der elektrodynamischen Lichttheorie wieder auf atomistische Vorstellungsweisen hin. Die physikalische Chemie, welche in der Phasenlehre von Gibbs die Zustände in der Materie durch eine endliche Zahl von Parametern charakterisiert, also Kontinuitätsvorstellungen zu Grunde zu legen scheint, entwickelt nach anderer Seite die wesentlich atomistische Ionentheorie. Zu derselben Zeit, wo man in der Physik vermeint, durch eine blos „phänomenologische" Schilderung der Erscheinungen das Beste zu leisten, wird in der Chemie die Lehre von der Lagerung der Atome im Raume ausgebaut, etc. etc. — Andererseits wäre hervorzuheben, dass die anatomische Vorstellungsweise nicht notwendig zur Idee von Fernkräften führt; man kann sie mit der Idee einer im Raume kontinuierlichen Kraftübermittlung verbinden, indem man die elektrischen oder materiellen Atome (wie immer man sich dieselben denken

mag, als singuläre Stellen in einem den Raum kontinuierlich erfüllenden Medium einführt.

Die so umschriebene Erörterung, so interessant sie sein möge, träfe aber doch nicht das eigentliche von der Fakultät vorgeschlagene Thema, sondern gäbe für dasselbe nur beiläufiges Material. Man wird dem Thema wesentlich näher kommen, wenn man fragt: in wie weit sind bei den genannten Beispielen die beiden Vorstellungsweisen, der Kontinuumstheorie und der Molekulartheorie, für die Erklärung oder, besser gesagt, die Darstellung der beobachteten Tatsachen mathematisch gleichwertig? Man wird den Sinn des Themas vollständig haben, wenn man zunächst alles Hypothetische oder Spekulative, auf das intime Wesen der Materie Bezügliche, abstreift und ganz allgemein Folgendes beachtet: Jedermann führt, sobald er die Gesamtwirkung ausgedehnter Gebilde beurteilen will, die in kleinen Dimensionen inhomogen sind, inhomogene Mittelwerte ein; für diese statuiert er Abhängigkeiten, die er durch möglichst einfach gewählte Funktionen ausdrückt. So ersetzt der numerische Rechner in zahlreichen Fällen Summationen durch

Integration etc. Der ursprüngliche Anlass zu dem solcherweise berühmten Ansatze liegt vermutlich in der Natur unserer sinnlichen Wahrnehmungen. Man denke z. B. daran, dass ein Schneehaufen, aus einiger Entfernung betrachtet, oder ein Wald, der den Horizont abschliesst, eine kontinuierliche Kontur zu besitzen scheinen. Hiermit verbindet sich der weiteren das Streben nach möglichst einfacher Darstellung. Wie weit ist der in Rede stehende Ansatz mathematisch berechtigt? Insbesondere, welchen Sinn haben auf die Abhängigkeiten, die wir zwischen den konvergenten Mittelwerten aufstellen, die Grundsätze der Differentialrechnung und der Reihenlehre anzuwenden? Und wenn wir durch eine solche Anwendung richtige Resultate finden, können wir dann auf die Homogeneität oder Nicht-Homogeneität des Substrats einen Rückschluss machen? — Erst wenn der Komplex der solcherweise berühmten Fragen erledigt oder doch verstanden ist, möge man zum Problem der Raumerklärung zurückgehen. Man wird sich dann fragen, welche innere Bedeutung den Stetigkeitsvoraussetzungen, die man hierauf bezüglich

von altersher zu machen pflegt, beigelegt werden muss, ob dieselben mehr sind als ein blosses Hülfsmittel zur leichteren Durchführung der mathematischen Betrachtung, und in welchem Sinne die Resultate, welche man von den genannten Voraussetzungen aus ableitet, auf objektive Gültigkeit Anspruch machen. —

Es ist unmöglich, das Gesagte hier noch einigermassen zu erläutern, ohne auf ein besonders einfaches Beispiel (welches Boussinesq gelegentlich behandelt) mag noch hingewiesen werden. Jedermann lernt, dass das Potential der Schwere im Innern eines Körpers der Differentialgleichung $\Delta V = -4\pi\varrho$ genügt. Welche Bedeutung hat diese Differentialgleichung, oder auch: welche Bedeutung will man den Grössen V und ϱ, die in der Differentialgleichung vorkommen, für einen Körper beilegen, der in kleinen Dimensionen inhomogen ist (wie der soeben genannte Schneehaufen?) und wie stellen sich diese Fragen, wenn man einen Aufbau des Körpers aus streng punktförmigen Atomen voraussetzen will? Man wird in dem einen oder andern Falle V und ϱ selbstverständlich als Mittelwerte einführen

wollen; wie sind diese Mittelwerte zu berechnen?

Über Fragen und Schwierigkeiten der hiermit bezeichneten Art sind die hervorragendsten Theoretiker früherer Jahrzehnte unbedenklich hinweggegangen. Man lese nach, wie Cauchy oder Poisson von Molekularvorstellungen aus zu den Differentialgleichungen der mathematischen Physik kommen. Und das hiermit gegebene Beispiel findet von seiten der Mehrzahl der heutigen Physiker ebenso unbedenkliche Nachfolge. Offenbar spielen dabei in die Überlegungen eine Menge empirischer Elemente hinein. Die Erfahrung gibt uns die Gewißheit, daß im allgemeinen kleine Abänderung der Prämissen die Resultate nur wenig abändert. Freilich trifft dies nicht immer zu (wenn „Instabilität" vorliegt, bei Explosionen etc.); die Naturforscher verlassen sich aber bezüglich der Frage, ob gegebenenfalls ein solcher Ausnahmefall vorliegt, oder nicht, auf ihr Gefühl oder auf die experimentelle Kontrole; wie der Erfolg zeigt mit Recht.

Der heutige Mathematiker aber, der über die Prinzipien seiner Wissenschaft nachdenkt, kann unmöglich die gleiche Selbstbeschränkung üben.

Er wird nicht die Zweckmässigkeit der geschilderten Verfahrens bestreiten, — sogar von da aus mit Vorliebe Anregung entnehmen —, darüber hinaus aber eine genaue mathematische Begründung und Umgränzung des Verfahrens verlangen. Für seinen Erkenntnis-trieb maafsgebend ist die moderne Entwickelung der Mathematik nach der kritischen Seite hin. Diese Entwickelung ist bisher in allgemeineren Kreisen, sowohl von physikalischer als auch von philosophischer Seite, gern als etwas Beiläufiges angesehen worden, was für die Zwecke der Naturerklärung nicht eigentlich in Betracht kommt. Die Aufgabe sollte aber doch nie sein, eine unbequeme Kritik zurückzuschieben, sondern immer nur, sie innerlich zu überwinden. Andererseits haben sich die Mathematiker in ihrer Mehrzahl damit begnügt, die neuen Prinzipien im Bereich ihrer Spezialwissenschaft zur Geltung zu bringen, sie haben nur erst selten Gelegenheit gehabt oder gesucht, die Beziehungen zu den Nachbargebieten entsprechend auszugestalten. Deshalb mögen einige Erläuterungen zur Sachlage hier am Platze sein.

1/ Es handelt sich um diejenige Entwickelung der Mathematik, welche als Arithmetisierung derselben bezeichnet wird. Als einzige Grundlage derselben gilt die Evidenz des Zahlbildes, bez. der Gesetze, nach denen man mit Zahlen operiert; auf diese Grundlage sind alle anderen Beziehungen zurückzuführen. Die Idee der kontinuierlichen Veränderlichen wird durch die allgemeineren Formulierungen der Mengenlehre ersetzt; die Idee der Funktion erfährt eine entsprechende Durchbildung. Differential- und Integral-Rechnung werden ausschließlich auf den strengen Grenzbegriff basiert; es erscheint als Regel, nicht als Ausnahme, daß eine stetige Funktion nicht differentiierbar ist etc. etc.

2/ Das Wesentliche ist nun, daß an der soliden, weise arithmetisierten Mathematik gemessen alle sinnliche Auffassung als etwas Ungenaues, nur auf eine Anzahl Dezimalen Bestimmtes erscheint. Trotzdem wird man die arithmetisierte Mathematik als Ausgangspunkt für die quantitative Beherrschung der Aussenwelt fest halten wollen. *)

*) Man kommt somit in neue Schwierigkeiten. Vergl. die Antrittsrede von Prof. Burkhardt: Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Denken, Zürich 1897.

In welcher Form hat dies zu geschehen? Und welche Erleichterungen darf man sich gestatten, wenn man von den Resultaten wieder nur eine begrenzte Genauigkeit verlangt? Dies ist die zentrale Frage, unter welches sich alles früher Gesagte unterbegreift.

3) In dem Gesagten ist bereits enthalten, was zur Lösung der vorliegenden Schwierigkeiten geschehen sollte. Es handelt sich darum, daß sich der Mathematiker und der Empiriker auf einem Zwischengebiete die Hand reichen. Für den Mathematiker erwächst die Aufgabe, auf Grund der arithmetisierten Wissenschaft eine umfassende Lehre von den Näherungsmethoden zu entwickeln, als eine besondere Disziplin dasjenige zu pflegen, was Hr. Heun neuerdings treffend als Approximationsmathematik bezeichnet hat *). Für den Empiriker aber wird es sich darum handeln, auf allen Gebieten und jedenfalls sehr viel mehr als bisher, den Genauigkeitsgrad festzulegen, innerhalb dessen die (äusseren oder inneren) Beobachtungen, von denen er ausgeht, richtig sind, oder innerhalb deren er zuverlässige Resultate

*) Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung IX. 2. (1900)

zu haben wünscht. —

Das hiermit bezeichnete Programm verlangt an sich nichts Neues, nur dass die strenge Durchführung bisher vielfach fehlt. Zahlenreich, wer haben sich von je an dasselbe angeschlossen und in Astronomie und Geodäsie ist dasselbe neilden Arbeiten von Gauss universell rezipiert. Von neueren rein mathematischen Arbeiten dürften ganz besonders diejenigen von Tschebyscheff zu nennen sein. Nicht minder wird man hier den Satz von Weierstrass anführen wollen, dass man jede in einem Intervall gegebene stetige Funktion durch eine rationale Funktion endlichen Grades mit beliebiger Genauigkeit gleichmässig approximieren kann. Als neue Forderung tritt nur auf, die bezeichnete Fragestellung als den eigentlichen Mittelpunkt aller angewandten Mathematik mehr in den Vordergrund zu rücken, und übrigens einzusehen, dass die approximative Auflösung der Grössenberechnungen sehr viel mehr, als man früher wusste, unser ganzes Denken durchdringt. Unsere Aussagen über die Natur der Dinge aber werden bescheidener werden. Man hat früher oft gesagt, dass andere als analytische

Funktionen in der Natur nicht vorkommen. Man wird diese Aussage jetzt dahin wenden, daß man vielleicht nur in Folge der Ungenauigkeit unserer Naturauffassung neither mit analytischen Funktionen ausgereicht hat und und zwar durchweg mit sehr einfachen analytischen Funktionen. Man wird darum aber noch nicht zu dem andern Extrem übergehen, welches Boltzmann neuerdings vertritt, nämlich die Hypothese von der Unstetigkeit der Naturerscheinungen voranstellt als Denknotwendigkeit hinstellt. —

Die Bedeutung der von der Fakultät gestellten Preisfrage dürfte hiermit genügend hervorgekehrt sein. Es galt, den Komplex der in Betracht kommenden Fragestellungen und Auffassungen in übersichtlicher Form darzulegen und womöglich kritisch zu sichten. Ein Mathematiker konnte zugleich unternehmen, die Lehre von den Näherungsmethoden auf einem speziellen Gebiete durchzuführen, ein Philosoph oder Psycholog, die Ungenauigkeit unserer sinnlichen Wahrnehmung nach der einen oder anderen Richtung genauer zu studieren; man denke an den von

Boltzmann mit Vorliebe herangezogenen Ki-
nematographen. Was an mathematischen Kennt-
nissen unbedingt verlangt werden musste, war nur,
dass der Autor das Wesen der arithmetisierten
Wissenschaft, wie es in den Schriften der heute
massgebenden Mathematiker zu Tage tritt, in sich
aufgenommen hatte. Hiervon genügt nicht, die
allgemeinen Auseinandersetzungen hervorra-
gender Autoren gelesen zu haben, welche den
Einzelheiten der modernen Präzisionsmathe-
matik niemals näher getreten sind, mag sich
nun um Helmholtz oder Kirchhoff, Boltz-
mann oder Mach handeln. Mathematik lässt sich
nur durch konzentriertes Studium erlernen; es
gibt bei ihr keinen „Königsweg".

Im Anschluss an das vorstehend
abgedruckte Gutachten verweise ich gern auf
zwei meiner eigenen früheren Publikationen,
die mit dem Gegenstande des Preisausschrei-
bens in naher Beziehung stehen. Es sind
dies:

Ueber den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve (Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen vom 8. Dec. 1873. abgedruckt in Bd. 22 der Math. Annalen, 1883).

The Evanston Colloquium (New-York 1894, Macmillan), Vortrag VI (vom 3. Sept. 1893): On the mathematical character of space intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences. (Vergl. auch die französische Uebersetzung des Colloquiums von Hrn. Laugel, die unter dem Titel „Conférences sur les Mathématiques" 1898 in Paris bei A. Hermann erschienen ist).

Übrigens findet man einschlägige Bemerkungen auch in den Vorträgen:

Riemann und seine Bedeutung für die Entwickelung der modernen Mathematik.

Vortrag, gehalten vor der Naturforscherversammlung in Wien, 1894. (Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, Leipzig 1894, sowie Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4,

Berlin 1897/.

Über Aufgabe und Methode der mathematischen Unterrichts an den Universitäten.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 7, Leipzig 1899.

F. Kl.